Bardhyl Adem Selimi

Amuziĝu per matematiko
Parto I

Tiranë 2009

La amuzaj minutoj dum la lecionhoro de matematiko[1]

La elstara matematikisto, Blez Paskal (Blaise Pascal), estas skribinta iam ke “La objekto de matematiko estas tiel serioza ke estas utila ne preterlasu okazon por igi ĝin kiel eble amuziga*”*. Des pli, unu maniero por plilarĝigi kaj pliprofundigi la matematikajn sciojn de la gelernantoj estas ankaŭ la traktado kun ili de la problemoj tiel nomataj amuzigaj.

Blaise Pascal (1623-1662)

Mia pli ol 40 jara sperto de instruado de matematiko estas konfirminta ke la gelernantoj ĝenerale, sed ankaŭ tiuj je notindaj scimankoj en matematiko aŭ ne interesataj pri ĝi, altiriĝas kiel per magneto de ĉiu problemo je distra karaktero sed je matematika enhavo.

Kial do?

Unue, mi opinias ke tiaj problemoj ne postulas la scipovon kaj la aplikeblon de la malfacilaj kaj severaj matematikaj teorioj, sed nur iom da logiko kiun posedas ĉiuj homoj kaj eble simplajn sciojn pri la subjekto kiujn ili estas lernintaj en la elementa lernejo, pro kio ili sentas sin relative certaj. Plue, la problemoj priparolataj havas kutime praktikan karakteron, do prezentas ian intereson por la ĉiutaga vivo.

Aliflanke, por la instruisto estas tre grava la traktado de tiaj problemoj ĉar tiamaniere li povas veki la intereson pri matematiko ĉe la lernantoj, sed ankaŭ ĉi lastaj edukiĝas per la rezonada pensmaniero.

La amuzaj paŭzoj dum la lecionhoro de matematiko similas iel al tiuj dum la sciencaj longdaŭraj konferencoj, kiam trinkante teon aŭ kafon, la partoprenantoj povas pli bone koncentriĝi kaj konservi la intereson al la pridiskutata temo.

Samtiel, la amuzaj problemoj ilustras kaj plifortigas la sciojn instruatajn en la klasĉambro. Ekzemple, ni prikonsideru tiajn egalaĵojn vaste uzataj kiel:

Kvadrata binomo $\mathbf{(a + b)^2 = a^2+2ab+b^2}$

Aŭ la diferenco de kvadratoj $\mathbf{a^2 - b^2 = (a +b) (a - b)}$

[1] Publikigita kiel artikolon de la Instituto pri Pedagogiaj Esploroj en Tirana, same en la revuo “Internacia Pedagogia Revuo”. (fragmento el la publikaĵo)

La aŭtoro kun siaj gestudentoj dum la intervaloj inter la lecionhoroj

Multaj lernantoj malfacile parkerigas ilin. Sed kiam la instruisto proponas al ili amuzan problemon bezonanta la aplikon de tiuj egalaĵoj, oni povas firme ellerni ankaŭ parkere ilin. Jen unu:

Oni rakontas ke la rusa oficiro Lermontov, samtempe poeto kaj amanto de algebro, estis iam dislokigita kune la taĉmento ie profunde en Siberio. Dum iu malvarma vintra vespero, en la izbo (kabano) de la oficiroj li proponis al la kolegoj la jenan problemo - ludon:

Mikhail Lermontov en la jaro 1837

"Pripensu nombron kaj tenu ĝin kaŝe de mi, multipliku ĝin kun si mem, aldonu al la produkto la kvaroblon de la pripensita nombro kaj poste aldonu kvar. Nun diru al mi la finan rezultaton. Mi povas diveni kiun nombron vi estas pripensinta dekomence.!"

Ĉi kaze Lermontov aplikis la konatan egalaĵon

$(x+2)^2 = x^2+4x+4.$

La rezultato estas plena kvadrato. Se tiu kvadrato estus 25, ni trovas la duan radikon kiu estas 5 kaj subtrahas de ĝi 2, do 5 - 2 =3. Kompreneble la serĉata nombro estas certe 3.

La ceteraj oficiroj ege miris pro ĉi tiu "lerteco" ĝis "ia magiaĵo" de la juna Lermontov.

Alia problemo:

Kiel ni mutipliku pli rapide eĉ parkere la nombrojn 103 kaj 97, aŭ 89 kaj 91 ktp?

Unue, rimarku ke tiuj nombroj povus skribati ankaŭ tiel

(100+3) kaj (100 - 3)

kaj (90 - 1) kaj (90+1).

Tiam $103*97 = 100^2 - 3^2 = 10\ 000 - 9 = 9991$

kaj

$90^2 - 1^2 = 8100 - 1 = 8099$.

Samtiel, oni povus kvadratigu parkere la nombrojn finiĝantaj per la cifero 5, ekz. 95^2.

Envere, tiaj nombroj povus skribati en la formo

$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25$

aŭ

$= 100a*(a + 1) + 25$.

Do, por trovi 95^2 sufiĉas ke ni multipliku 9 kun nombro unu pli, do 9*10, poste kun 100 kaj fine aldonu 25

Pli konkrete:

$95^2 = 9*10*100 + 25 = 9000 + 25 = 9025$

Samtiel
$65^2 = 6*7*100+25 = 4200 + 25 = 4225$.

Konkludo

Ni ne perdas tempon proponante al la lernantoj problemojn je karaktero amuza kaj distra, kontraŭe tio estas necesa kaj profitdona ĉiufoje.

Tion ni povas realigi en ĉiu lecionhoro, dum, ni diru, kvin minutoj. Sed povas okazi ke la problemoj ne solveblas dum la lecionhoro. Tiam ni lasos ilin kiel hejmtaskon por ke ni pritraktu ilin la venontan fojon.

La lernantoj volonte priokupiĝas per ili kaj la instruisto rekompencas la sukcesajn solvintojn.

Cetere li devas serĉi kaj kompili plej variajn amuzajn problemojn disfolumiante tiucele la diversajn revuojn, librojn, same navigante en interreton.

Mi persone ege lernis kaj forte motiviĝis aparte de du kolegoj esperantistaj, s-ro Petko Arnaŭdov (jam forpasinta,1931-2006**)**)

Petko Arnaŭdov

kaj s-ro Gerard Cool (same forpasinta)

Gerard Cool

kiuj estas verkintaj mem tre interesajn librojn tiutemajn.

La traktadon de la amuzaj problemoj la instruisto devas antaŭvidi eĉ en sia taglibro.

La sperto akirita en la klasĉambro servas al la lernantoj amantaj matematikon por sin pretigi por la matematikaj olimpiadoj, kompreneble ankaŭ post kiam ili trejniĝos speciale en la matematika rondo de la lernejo.

La aŭtoro dum sesio de olimpiado en la lernejo

La pli belajn problemojn oni povus afiŝigi ankaŭ en la matematika gazeto de la lernejo.

Historiaj problemoj

Estas ja malnovaj amuzaj problemoj formulitaj dum la pasintaj jarcentoj, inkluzive la Mezepokon, kiuj, samkiel la fabeloj kaj proverboj ks, konsistigas la trezoron de la popola kulturo. Jen kelkaj el ili ĉerpitaj de mi:

- **La kameloj**

"Arabo, antaŭ ol morti heredigis al siaj tri filoj 17 kamelojn kondiĉe ke la pli aĝa ricevu la duonon de ili, la mezaĝa la trionon kaj la pli junaĝa naŭonon. Kiamaniere oni dividu la heredaĵon?"

Solvo
Ĉar mem la filoj ne kapablis estigi la dividon, ili petis la helpon de samvilaĝano. Ĉi lasta aldonis al la grego sian kamelon kaj prikonsideris la nombron de la kameloj 18. Poste li donis la duonon, 9 kameloj al la unua filo; la trionon, 6 kameloj al la dua filo kaj la naŭonon, 2 kameloj al la tria filo. Restis 18 - (9+6+2) =1 kamelo kiun li retenis por si mem.

Komento

Ĉu la divido estis prava kaj justa?
Certe ĝi ne estis prava, ĉar 9>17/2; 6>17/3 kaj 2>17/9, tamen tio konvens al tri filoj!..
Dume la divido estis justa ĉar la nombroj 9, 6, 2 proporcias al ½ ,1/3,1/9
Konstateblas ke 17/18 =1/2 +1/3 +1/9

- **La Testamento**

"Iu viro en la pratempa Romo estis mortante, dum sia edzino estis graveda. Antaŭ ol morti, la viro testamentis sian riĉaĵon kiel jene: se la edzino naskus filon, la riĉaĵo dividiĝu je proporcio 2:1, favore al filo; se ŝi naskus filinon, tio dividiĝu je proporcio 1:2 favore al la edzino.
Sed fakte naskiĝis du ĝemeloj, nome filo kaj filino.
Kiamaniere oni dividu la riĉaĵon?

Solvo

Tion sugestis la ekvacion

$x+2x+\frac{x}{2} = 1$ de kiu x = 2/7

x reprezentas la virinan parton,
2x aŭ 4/7 tiun de la filo
kaj x/2 aŭ 1/7 la filinan parton.

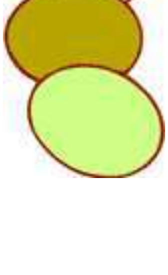
Tian solvon proponis iu el la tiamaj juristoj (II jc)

Komento

Ĉu la solvo estas justa?
Kelkaj juristoj asertas ke tio ja tro diskriminacias la filinon. Se la patrino ricevas minimume 1/3, tiam la ceteron, 2/3 dividos inter ili la filo kaj filino laŭ proporcio 4:1. Se unue naskiĝas la filo, li ricevas 2/3 dum 1/3 dividiĝas inter patrino kaj filino je raporto 2:1. Se naskiĝas unue la filino, ŝi ricevos 1/3 dum la 2/3 dividiĝas je raporto 2:1 je favoro al la filo.
Kaj se la edzino naskus 3,4,5 gefilojn?

- **La ovo-vendistino**

"Virino portis ovojn al la merkato. Preterpasanto puŝis ŝin senvole, rezulte la korbo elfalis surteren kaj la ovoj rompiĝis. La kulpulo tuj deziris rekompenci ŝin.
- Kiom da ovoj estis en via korbo?- demandis li.
- Mi ne bone memoras, sed mi povas diri nur, ke kiam mi envicigis ilin po 2, po 3, po 4, po 5 kaj po 6, en la korbo restis ĉiamfoje unu ovo, tamen kiam mi envicigis ilin po 7, en la korbo ne plu restis ovo.
Kiom da ovoj, do, estis komence en la korbo?



Solvo
Ni trovu la Malpligrandan Komunan Multoblon (2,3,4,5,6) = 60
Do, la serĉata nombro estas multoblo de 60, plus unu.
Ĉi nombroj prezentiĝas per la formulo **60n+1,** kion oni povus skribi ankaŭ kiel
7*8 n+4n+1
Ĉar 60n+1 dividiĝas per 7 (laŭ rakonto de la virino) kaj 7*8n dividiĝas per 7, tiam ankaŭ 4n+1 devas dividiĝi per 7.
La plej malgranda valoro de n, kontentiganta ĉi kondiĉon estas 5.
Tio signifas ke en la korbo estis

7*8*5 +4*5 +1 = 56*5+21 = 280 +21 = 301 ovoj.

La alia valoro, por n=12, donas pli grandan nombron, 721 ovoj, kio malplej verŝajnas.

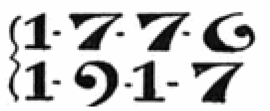
Alia versio

" Ni posedas kvanton de ovoj malpli ol 100. Kiam oni grupigas ilin po 2, restas unu ovo, kiam oni grupigas ilin po 3, restas du ovoj, kiam ili grupiĝas po 4 restas 3 ovoj kaj grupiĝinte po 5 restas 4 ovoj. Kiom da ovoj estas entute?

Solvo
La sola ducifera nombro plenumanta ĉi kondiĉon estas 59

- **Aŭtonumero**

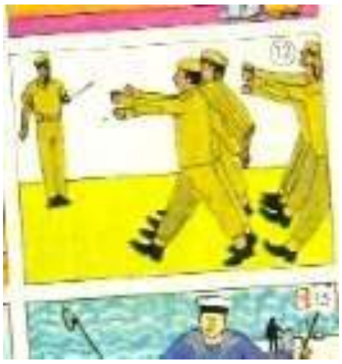
" La aŭtonumero je kvar ciferoj plenumas ĉi ecojn: ĝi donis reston 1 kiam dividiĝis per 2, 3, 4, 5, 6, sed plene dividiĝis per 11. Kiu estas tiu aŭtonumero?"



Solvo
Ni trovu la malplejgrandan komunan multoblon (2,3,4,5,6) = 60
Sed 61 ne estas multoblo de 11. Ni devas trovi la malplejgrandan multoblon de 61 kaj 11
(61,11) = 671.
La aŭtonumero konsistas el 4 ciferoj.
Tiam ni ekhavos multoblon de 671 trovebla per la multipliko de ĝi per nombroj 1-14.
Sed restas nur 671 * 11= 7381
Pruvu!

- **Manifestacio**

"Se oni envicigus la manifestiantojn en la stadiono po vicoj el 10 personoj, restas unu persono; samtiel, se oni envicigus ilin po 9, po 8, po 7, po 6, po 5, po 4, po 3 kaj po 2. Estas estas sciite ke ilia nombro estas malpli ol 5000.



Divenu kiom da manifestiantoj estas entute?"

Solvo

Ni notu per x la nombron de manifestiantoj
Tio estas, (x-1) devas dividiĝi per ties malplej granda komuna multoblo, kiu estas:

$2^3 * 3^2 * 5 * 7 = 2520$.

Tio estas, x-1 = k*2520 kie k estas natura nombro por nia problemo.

Sekve

x= 2520*k +1.

Se ni prenas k >1, ni transpasas la nombron 5000. Tial restas k=1 kaj entute manifestiantoj estas 2521.

- **Sako je pomoj**

"Mi posedas sakon da pomoj. Pomoj estas malpli ol 5000. Kiam mi envicigas ilin po10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, ĉiam mankas unu pomo. Kiom da pomoj estas en la sako?"

Solvo
La serĉata nombro plus 1 devas dividiĝi samtempe per 2, 3,....10. Do, ĝi devas dividiĝi per la ties malplej granda komuna multoblo kiu estas

8*9*5*7=2520.

Do, N+1 devas esti multoblo de 2520.
Sekve N +1 = k*2520.

Ĉar estas demandata ke la nombro devas esti malpli ol 5000, tio plenumiĝas nur per k=1.
De ĉi tie ni povas skribi

N= 2520-1= 2519.

Pruvo:: 2519+1 dividiĝas per 2,3,…..10

- **Flanoj**

"3 turistoj mendis flanojn. Atendante ke la flanoj pretiĝu, ili decidis ripozi en la ĉambro. Kiam la kelnero alportis la bakitajn flanojn en la ĉambron, la turistoj ankoraŭ dormis. Tiam li lasis la flanojn sur la tablon kaj foriris. Post kiam vekiĝis la unua turisto, ĉi tiu kalkulis kiom da flanoj estis, prenis la trionon de ili, manĝis kaj denove ekdormis. Iom poste, vekigixs la dua kiu agis sammaniere. Ankaŭ la tria agis sammaniere. La tria turisto lasis surtable 8 flanojn. Finfine, vekiĝis definitive ĉiuj tri turistoj kaj ili volis disdividi la reston de la flanoj. Kiamaniere oni devus fari tion?

Solvo
Kompreneble, la unua turisto estas jam manĝinte sian porcion. La tria postlasis 8 flanojn, do po 4 por la ceteruloj. Tio estas li estas trovinte 8+4 =12 flanoj. Samrezone la dua estas manĝinte 6 flanojn kaj trovinte 18 flanojn. Dum la unua estas manĝinte 9 flanojn kaj trovinte 27 flanojn.. Do, al la dua apartenas 3 kaj al la tria 5 flanoj.

- **Kiel oni dividu la rekomepencon?**

"Du araboj estis marŝante longan vojon sur dezerto. La unua kunportis 5 flanojn dum la dua 3 flanojn. Al la du vojaĝontoj aliĝis tria vojaĝonto kiu ne kunportis iun flanon. Sed ĉiuj tri amikiĝis kaj disdividis la flanojn tutegale inter si. La tria turisto, je la fino de la vojaĝo, volis rekompenci la bonkorulojn per ok oraj moneroj. Sed kiam li foiris komencisĝis ia kverelo inter la unuaj du turistoj pri la proporcio de la divido. Unu diris 5:3, la alia 4:4. Sekve ili bezonis la konsilon de saĝulo. Ĉi lasta, pripensiĝinte, decidis dividi la ok orajn moneroj laŭ alia proporcio. Ĉu vi povas diveni tion?

Solvo

Ni supozu ke ĉiu flano dividiĝu en tri egalajn partojn. Tiam, la unua arabo havis dekomence 5*3= 15 egalajn porciojn dum la dua 3*3 =9 porciojn kaj entute
15+9= 24 porciojn.
Tiam ĉiu estas manĝinta 24:3 = 8 porciojn. Do, la unua arabo manĝis 8 el 15 porcioj kaj lasis 7 porciojn al la tria arabo; la dua manĝis 8 el 9 kaj lasis 1 por la tria arabo. Rezulte, la unua devas ricevi 7 ormonerojn dum la dua arabo 1 ormoneron.

- **La princino Libuŝe**

Laŭ legendo, la princino Libuŝe kondiĉigis al la svatantoj ke ili solvu la jenan aritmetikan problemon:

"Ovo-vendistino donis al la unua aĉetanto la duonon de la ovo-kvanto plus unu ovon; al la dua aĉetanto la duonon de la resto plus unu ovon; fine, al la tria aĉetanto la duonon de la nova resto plus la lastan ovon de sia korbo. Ĉu vi povas diveni kiom da ovoj estis dekomence en la korbo?"

Solvo

Ni rezonu pri la tria aĉetinto, ricevinta la lastan duonon plus la lastan ovon, do li ricevis du ovojn.
Ĉi lastajn ovojn estas lasinta jam la dua aĉetinto, kiu estas ricevinta 1+3 = 4 ovojn. Kompreneble, la unua aĉetinto estas postlasinta en la korbon 4+2= 6 ovojn kaj ricevinta 1+7= 8 ovojn. Entute, en la korbo, dekomence estis 8+4+2=14 ovoj.

Noto: La problemo povus ĝeneraliĝi por pli ol tri aĉetantoj.

Alia versio de ĉi tiu problemo estas kiel jene:

- **La sinjorino de la salamoj**

"Iu sinjorino tre ĝentila kaj bonkora deziris donaci salamojn al la hundo-posedantoj. Ŝi donacis al la unua la duonon de la salamoj kaj duonpecon da salamo por la ties hundo. Al la dua ulo ŝi donacis similmaniere la duonon de la restinta kvanto de salamoj plus duonpecon de salamo por la ties hundo. Tiel, ŝi agis ĝis la sepa hundoposedanto. Rezulte, la sinjorino ne plu havis eĉ unu salamon ĉe si. Ĉu vi povas diveni kiom da salamoj posedis la sinjorino dekomence?

Solvo
La sinjorino havis dekomence entute 127 salamojn.
Pruvu!
(la unua estas ricevinta 64, la dua 32, la tria 16, la kvara 8, la kvina 4, la sesa 2 kaj la sepa 1 salamon).

- **La patro, la tri filoj kaj la pomoj**

"La patro aĉetis kvanton da pomoj. Tion li disdividis al liaj tri filoj. Al la unua li donis la duonon de la tuta kvanto plus duonpomon. Al la dua li donis la duonon de la

restinta kvanto plus duonpomon. Same li agis kun la tria filo. Fine, ne plu restis eĉ unu pomo. Kiom da pomoj aĉetis la patro? Kiom da pomoj ricevis ĉiu filo?

Solvo
Ni ekiru de la lasta filo, la tria, kiu ricevis ½ +1/2 = 1 pomon. Ĉi pomon estas postlasinta la dua filo, kiu mem estas ricevinta 1 ½ +1/2 = 2 pomoj. La unua estas ricevinta 4 pomojn Do entute la patro alportis hejmen 7 pomoj.

Pruvo: ½ *7 +1/2 = 4
7 – 4 = 3
½ *3 +1/2 = 2
3 - 2 = 1

½ *1 +1/2 = 1
1-1= 0

- **La diablo kaj la pigrulo**

"Neniu amis la pigrulon, Ĉie oni kondukis lin per la vortoj: iru al la diablo! Tiel la pigrulo iris al la diablo kaj petis ĉi lastan instrui lin kiel gajni facile la monon. La diablo diris:
-Ĉu vi vidas tiu ponton? Se vi transpasos ĝin, la mono en via poŝo duobliĝos. Vi konstatos tion nepre. Sed por ĉi konsilo vi devas pagi al mi 24 eŭroj.
La pigrulo sekvis la konsilon de la diablo kaj transpasis la ponton. Konstatinte envere ke la mono en sia poŝo duobliĝis li pagis la diablon per 24 eŭroj.
Sed li volis provi denove la ŝancon. Li transpasis la ponton eĉ tri fojojn kaj ĉiufoje la pigrulo pagis la diablon per 24 eŭroj.
Fine en lia poŝo ne plu restis mono.
Ĉu vi povas diveni kiom da mono havis la pigrulo dekomence en sia poŝo?

Solvo
Ni notu per x la monon havinta la pigrulo dekomence en sia poŝo;
2x la monon duobligitan la unuan fojon;
2x-24 estas la mono post kvitiĝo kun la diablo;
2(2x-24) estas la mono post transpaso duan fojon.
2(2x-24) - 24 estas la mono restinta post la pago.
2[2(2x-24)-24] estas la mono post la transpaso trian fojon.
2[2(2x-24)-24] - 24 estas la mono restinta je la fino, kio estas ja nul.

Solvante ĉi ekvacion, rezultiĝas
x= 21 eŭroj.

Noto: La problemo povus ĝeneraliĝu per aliaj pagmonoj

- **Problemo de Vidmano (1489)**

"Leono formanĝas ŝafon ene de unu horo, lupo formanĝas ĝin ene de 4 horoj kaj ŝakalo ene de 6 horoj. Dum kiom da horoj povus formanĝi la ŝafon kune leono, lupo kaj ŝakalo"

Atentu: Laŭ mia sperto plimulto de studentoj donas ne precizajn respondojn, eĉ kelkaj el ili ne komprenas ke tiu tempo devas rezultiĝi malpli ol unu horo.

Solvo

Ene de unu horo la leono manĝus 1/1 de la ŝafo; la lupo ¼ de la ŝafo; la ŝakalo 1/6 de la ŝafo.
Kune, ene de unu horo, ili manĝus:

1 + ¼ + 1/6 + = (12 + 3 + 2) / 12 = 17 / 12 de la ŝafo.

Tiam, la tutan ŝafon ili formanĝus ene de 12/17 horo aŭ proksimume 42 e ½ minutoj.

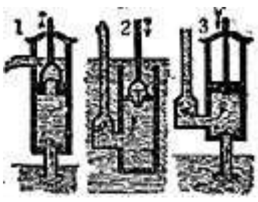
- **Problemo de Husuirt-o** (1501):

"1 masonisto konstruas la domon ene de jaro, alia masonisto ene de du jaroj, la tria ene de tri jaroj, dum la kvara ene de kvar jaroj. Dum kiom da tempo la domo finkonstruiĝos de kvaropo de masonistoj?"

Respondo: 12/25 de la jaro, aŭ malpli ol ses monatoj.

- **Du pumpiloj**

"Du pumpiloj plenigas akvorezervejon ene de tri horoj. Unu el ili, sola, povas plenigi ĝin 2.5 oble pli rapide ol la dua pumpilo sole. Dum kiom da horoj la akvorezervejo pleniĝas de ĉiu pumpilo sole."



Solvo
Ni notu per x horoj la tempon dum kiu pleniĝas la akvorezervejo per la unua pumpilo. Tiam la dua pumpilo plenigus ĝin dum 2.5 horoj.
Dum unu horo, la pumpiloj plenigas respektive 1/x kaj 1/(2.5x) de la akvorezervejo kaj kune 3.5 / 2.5x de ĝi. Aliflanke, tiu esprimaĵo egalas al 1/3 ĉar dum tri horoj ili plenigas ĝin kune.

Do,

$3.5/2.5x = 1/3$

Aŭ

$7/5\ x = 1/3$

Rezultiĝas

$x= 21/5 = 4.2$ horoj.

Do, la unua pumpilo plenigas ĝin dum 4.2 horoj, dum la dua pumpilo dum

$4.2*2.5 = 10.5$ horoj.

- **Akvorezervejo**

"Unu tubo malplenigas akvorezervejon dum 2 horoj, alia tubo dum 3 horoj kaj tria dum x horoj. Trovu esprimaĵon pri la tempo dum kiu la akvorezervejo malpleniĝas per ĉiuj tri tuboj kune.
Divenu x, kondiĉe ke la akvorezervejo malpleniĝu ene de unu horo."

Solvo
Dum 1 horo ĉiu tubo malplenigas respektive ½ , 1/3 kaj 1/x de la rezervejo. Ĉiuj tri kune malplenigas ½ +1/3 + 1/x de la rezervejo.

Adiciinte, ni ricevas

$(5x+6)/6x$.

Tiam la tutan rezervejon ili malplenigas dum

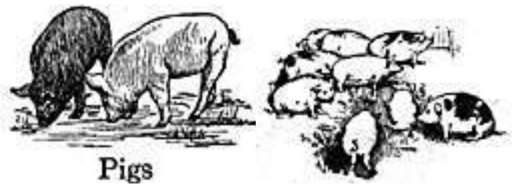
$6x/(5x+6)$ horoj.

Ni formu la ekvacion

6x /(5x+6) = 1
6x = 5x +6
aŭ
x = 6

Do, la tria tubo devus malpleni la rezervejon dum 6 horoj.

- **Saĝaj komercistoj**



"Du komercistoj aĉetis kune porko-gregon el 250 kapoj per 100 soldoj (speco de mono). Se ili vendus 5 porkojn per 2 soldoj, nenia profito rezultiĝus

*(250:5 = 50 ; 50*2 =100).*

Kiamaniere ili devus agi profiteble?

Solvo:

Ili dividis la porkojn en tri grupoj: la pli grasajn (entute 120) kaj malpli grasajn (same 120) separate. La trian grupon konsistigus nur 10 porkoj.
La unuan grupon il vendis 2 porkoj per 1 soldo dum la duan grupon vendis 3 porkoj per 1 soldo. Tiel ili enspezus 60 soldoj por la unua grupo kaj 40 soldoj por la dua, entute 100 soldoj. Sed restis al ili 10 porkoj, kiuj konsistigas ja ilian profiton..

- **La tombo de Diofanto**

Sur la tombo-ŝtono de Diofanto oni skribis la jenon:

"Oh, vi, hazarda preterpasanto, se interesas vin mia aĝo, tiam sciu ke: mia infaneco daŭris 1/6 de la tuta vivo; dum la junuleco 1/12. Post kiam pasis ankoraŭ 1/7 de la vivodaŭro, mi edziĝis; post kvin jaroj mi patriĝis per filo, kiu bedaŭrinde mortis kiam

li atingis nur la duonon de mia aĝo. Pli poste, mi okupiĝis per matematiko dum kvar jaroj por min konsoli ĝis la morto".


La tombo de Omer Khajamo

Solvo
Oni uzas simplan ekvacion kun unu variablo je unua grado:

1/6 x+1/12 x +1/7 x + 5 +1/2 x +4 = x

De kie, per multipliko al la komuna denominatoro 84, rezultiĝas

14x +7x +12x + 5*84 +42x +4*84 = 84x
75x - 84x = - 5*84 - 4*84
- 9x = - 756
x = 84

- **Problemo de la hinda princo Siran**

" Oni rakontas ke la hinda princo Siran invitis en sian palaco la inventinton de la ŝakludo, Sissah ibn Dalir, por rekompenci lin pro la plezuro donacita danke al tiu mirinda ludo. Sed ĉi lasta rifuzis kian ajn donacon, proponitan al li de princo, jen ĉevalon, jen domon, jen bienon aŭ ion alian, ĉar li estis inventinta la ludon nur motiviĝinte de propraj plezuroj.
La princo insistis, eĉ minacis la inventinton per ekzekuto, enkaze de plia rifuzo al rekompenciĝo. Tiam ĉi lasta demandis ke oni donu al li kvanton da greno formiĝonta laŭ la jena regulo: unu greneron por la unua kvadrato de la ŝaktabulo, 2 grenerojn por la dua kvadrato, kvar grenerojn por la tria, ok por la kvara kaj tiel plu ĝis la 64-a kvadrato,ĉiamfoje duobligante la nombron.

La palaco Taĝ Mahal

La princo, kiu ne scipovis matematikon, opiniis ke la kvanto de greno postulata de la ŝakluda inventisto estis ne konsiderinda, tamen ordonis la subulojn ekkalkuli precize ĝin kaj tuj liveru ĝin al la speciala invitito. Sed, post semajno, la komisiitoj sin prezentis ĉe princo kaj raportis ke la rekompenco estas malebla, ĉar la postulita kvanto de greno estas eksterodinare granda. Ĉu tio eblas?"

Solvo

La problemo koncernas la sumon 1 +2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256+ ....ĝis la 64a termino.
Se vi adicias ĝin simple laŭ kolono aŭ per la simpla poŝa kalkulo, certe trovos kolosalan numeron

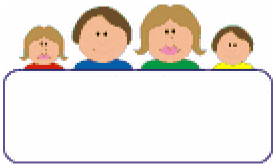
N= 18 446 744 073 709 551 615 (l sikstilonoj).

Ĉi kvanto povus kovri la terglobon (ekskludante akvosurfacon) je tavolo dika 9 mm!

Princo Siran, kompreninte ke la inventinto de la ŝakludo estis postulinte nerealigeblan aĵon, ege koleriĝis kaj ordonis ke oni senkapigu la talentulon.

- **La maljuna Ihsan**

"En iu turka vilaĝo la homoj longevivis. Inter ili estis ankaŭ la maljuna Ihsano kiu havis multe da gefiloj, genepoj kaj pragenepoj, entute kun li mem 2801.
Ĉiu infano lia havis siavice samnombran kvanton da gefiloj, ĉiu genepo saman nombron de gefiloj, ĉiu pragenepo saman nombron da gefiloj, kiuj ankoraŭ ne geedziĝis. Plue, ĉiuj infanoj estas vivaj.
Ĉu vi povas diri kiom da infanoj havis la maljuna Ihsano?



Solvo

Ni notu per **n** la nombron de la infanoj de Ihsano. Tiam la nombro de liaj genepoj estas $\mathbf{n^2}$, tiu de pragenepoj estas $\mathbf{n^3}$ dum tiu de prapragenepoj estas $\mathbf{n^4}$.
Do ni havas la ekvacion:

$$n+n^2 +n^3 +n^4 = 2800$$

Ni faktorigu ĝin

$$n(1+n^2 + n^2 + n^3) = n(1+n)(1+n^2)$$

Ĉar $2800 = 2^4 * 5^2 * 7$ kaj tio dividiĝas plene per 7 kaj n>1, n<10 ĉar $10^4 = 10\ 000 > 2800$, tiam n povas esti jen 2, aŭ 4, aŭ 5, aŭ 7, aŭ 8.
Sed n=8 ne validas, ĉar $8^4 = 4096$, tio estas. n<8.
Provinte n=7 rezultiĝas ke ĝuste tio kontentigas ĉiujn postulojn de la problemo.
Do, la maljuna Ihsano havis 7 infanojn.

- **La barko**

"En iu barko dronanta estis 30 pasaĝiroj, el kiuj 15 viroj kaj 15 virinoj. Ĉar ĝi enhavis nur unu savboaton por 15 personoj, la kapitano intencis certigi lokojn en ĝi nur por la virinoj. Sed tion li volis estigi ruzmaniere kiel jene: li envicigis ĉiujn pasaĝirojn laŭcirkle certavice kaj komencis nombri ĝis dek. La persono kiun trafis la deko tuj devus surboatiĝi.
Poste la kapitano denove nombris ĝis dek kaj la persono de la numero dek tuj surboatiĝis. Tiamaniere rezultiĝis ke ĉiuj virinoj surbarkiĝis kaj la viroj ne sentis sin diskriminaciitaj. Ĉu vi povas diveni la ruzecon de la kapitano?"


Solvo

La enciĝo jenas:

V V V V I I I I I V V I V V V I V I I V V I I I V I I V V I.

Noto: V signifas viro, dum I signifas Ino
(sur la figuro B signifas viro, dum G signifas Ino - virino en la albana)

Originale la problemo temis pri 30 personoj, el kiuj estis 15 kristanoj kaj 15 hebreoj, aŭ 15 blankuloj kaj 15 nigruloj.

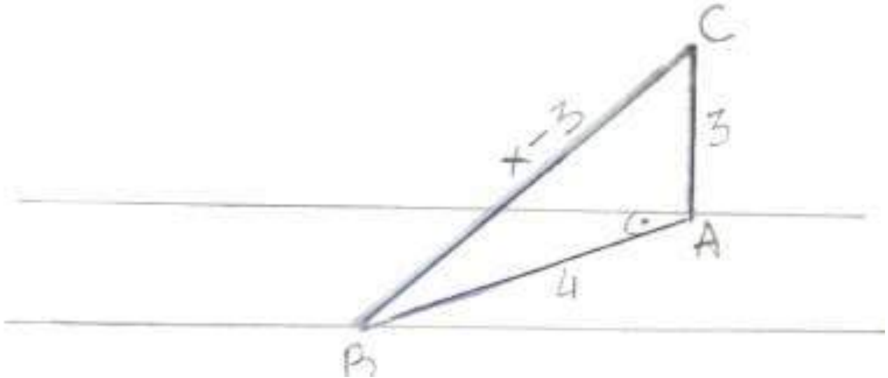
Populara formo de ĉi tiu problemo estas ankaŭ la jena:

"Ĉirkaŭ la manĝotablo sidas sep personoj, el kiuj: 5 studentoj kaj unu geparo-proprietuloj de la restoracio. Ĉiuj tagmanĝas kune sed nur du personoj devas pagi por ĉiuj sep. Pagos tiu al kiu trafas la nombro dek.
Tial, la studentoj sidiĝis ruzmaniere por ke pagu la proprietuloj. Ĉu vi povas diveni la lertan enviciĝon ĉirkaŭ la tablo?"

- **La poplo**

(Pratempa hinda problemo)

“ Sur la bordo de iu rivereto, kies larĝeco estis kvar piedoj stariĝis poplo. La ventego rompis ĝin je la alteco 3 piedoj, tiamaniere ke la pinto ektuŝis la alian bordon de la rivereto, vertikale al la bordolinio. Kiom alta estis la poplo?”



Ĉikaze ni povas solvi la ekvacion:

$(x-3)^2 = 3^2 + 4^2 = 25$

Kiu donas

x-3 = 5 kaj x-3 = -5.

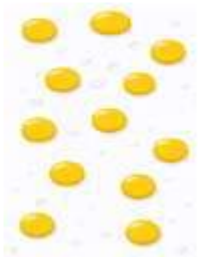
Akceptebla estas la pozitiva radiko x= 8

Respondo: La alteco de la poplo estis 8 piedoj

- **La problemo de Euler-o**

Leonard Euler (1707-1783)

"Disdividu 100 ovojn en du grupojn, laŭ grandeco, je diversaj prezoj, certigantaj respektive 6 2/3 kaj 15 eŭroj, tiamaniere ke se oni multiplikus la menciitajn kvantojn per la alies prezo la enspezoj rezultiĝus egalaj."



Solvo
Ni notu per x la unuan kvanton kaj per (100-x) la alian kvanton. Tiam la prezo po ovo en la unua kvanto estus

6 2/3 / x

kaj por la dua kvanto

15 /(100-x).

Multiplikante ilin respektive per (100-x) kaj x ni ricevos la ekvacion:

[6 2/3 / x] *(100 - x) = [15 / (100 - x)] *x

De ĉi tie, ni havas $(20/3) / x^2 = 15 / (100 - x)^2$

Aŭ

$(4/3) / x^2 = 3 /(100 - x)^2$ aŭ

$9x^2 = 4 (100 - x)^2$

De kie

3x = 2(100 - x) aŭ 5x= 200 aŭ x = 40 dhe 100 – x = 60

Respondo: 40 ovoj kaj 60 ovoj

Problemoj kun ujoj

Ĉi tie eniras problemoj kiuj populariĝis inter la vino - komercistoj dum la Mezepoko kaj pli poste.

Ekzemplo

- **Problemo de Baŝe**

"Je nia dispono estas 8 vinomasoj kaj tri ujetoj je kapacito respektive: 8 litroj, 5 litroj kaj 3 litroj. Disdividu la vinomason en du masojn, 4 litroj kaj 4 litroj.."

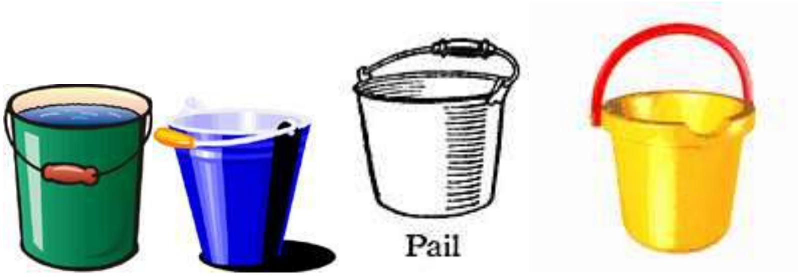
  

Solvo
Ni prezentu ĉi sube la sinsekvajn agojn kiel jene:

8	0	0
3	5	0
3	2	3
6	2	0
6	0	2
1	5	2
1	4	3
4	4	0

- **Problemo de R. Boll**

“Je nia dispono estas kvar ujetoj je kapacito 24 L, 13 L, 11 L kaj 5 L kaj entute 24 L da vino. Disdividu ĝin en tri egalajn masojn, 8 L. 8L. 8L”



Solvo

24	0	0	0
13	0	11	0
8	0	11	5
0	8	11	5
11	8	0	5
16	8	0	0
16	0	8	0
3	13	8	0
3	8	8	5
8	8	8	8

- *Kiamaniere, posedante du ujetojn je kapacitoj 10 L kaj 7 L ni povus ricevi kvanton de 8 L el la akvo, apude?*

Solvo

Ago-vico	*Unua ujeto*	*Dua ujeto*	
1	7	0	
2	0	7	
3	7	7	
4	4	10	
5	4	0	la akvon de ĉi tiu ni verŝos en la riveron
6	0	4	
7	7	4	
8	1	10	
9	1	0	la akvon verŝas en la riveron
10	0	1	
11	7	1	
12	0	8	

- **Alia**

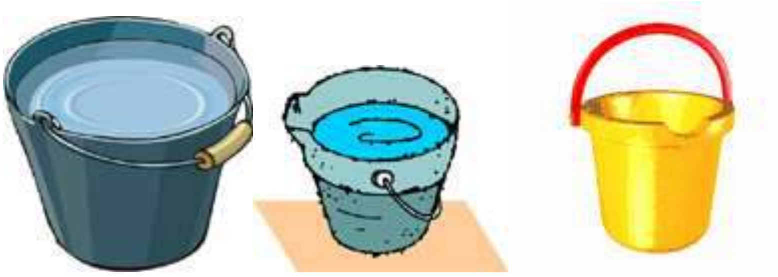
El ujo kun petrolo je kapacito 14 L ni devas ĉerpi 3 litroj per du ujetoj je kapacitoj 9 litroj kaj 5 litroj.

Solvo

Agoj	*La kvanto post la verŝo*		
	Unua ujeto	*Dua ujeto*	*Tria ujeto*
Originala pozicio	*14*	*0*	*0*
1	5	9	0
2	5	4	5
3	10	4	0
4	10	0	4
5	1	9	4
6	1	8	5
7	6	8	0
8	6	3	5

- **Disdividu en du egalajn partojn**

En unu botelego enestas 10 litroj da lakto. Oni demandas ke, per malplena ujeto je kapacito tri litroj kaj alia malplena ujeto je sep litroj, ni disdividu la laktokvanton en du egalajn kvantoj po kvin litroj.



Solvo

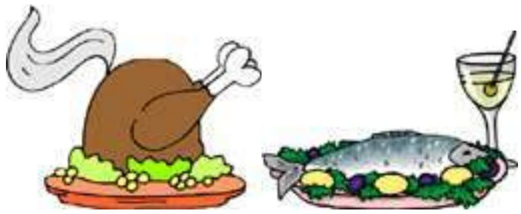
Por plenumi ĉi taskon ni devas fari minimume 9 verŝojn pro kio rezultiĝas la jena tabelo:

Nr de la verŝoj	*Botelego*	*Ujeto I*	*Ujeto II*
-	10	0	0
1	3	0	7
2	3	3	4
3	6	0	4
4	6	3	1
5	9	0	1
6	9	1	0
7	2	1	7
8	2	3	5
9	5	0	5

Aliaj problemoj

- **La tagmanĝo**

"Grupo de eksaj abiturientoj renkontiĝis okaze de datreveno de maturiĝo por tagmanĝi kune en restoracio. Ĉiu el ili konsumis averaĝe 630 Lekoj (Lek - la albana monunuo). Sed kiam alvenis la kelnero, evidentiĝis ke kvar personoj ne disponis je mono, tial la ceteruloj devus pagi po 700 Lekoj. Kiom da kamaradoj estis entute dum la tagmanĝo?"



Solvo

Se per **x** ni notu la tutan nombron de kamaradoj, la fakturo de la kelnero devus esti

630 x

aŭ

700(x - 4)

Formante la ekvacion kun ili, ambaŭflanke ni ricevas

700x - 630x = 2800

aŭ

70x = 2800

aŭ

x = 40

Respondo: 40 personoj.

- **Kioma estas la horo?**

- *Kioma estas la horo- demandis la filo sian patron.*
- *Ĝis la tagofino restas ankoraŭ kvin horoj malpli ol kiom da horoj estas jam pasintaj ĝis nun.*
Ĉu vi divenus kioma estas la horo nun?

Respondo:

Estas pasintaj ni diru **x** horoj, dum plurestas **(x-5)** horoj.. La tago havas 24 horojn. Tiam:
$x + (x-5) =24$
donas
$2x -5 =24$,
aŭ
$x = 29/2= 14 \frac{1}{2}$

Nun estas dekkvara kaj duono.

- **La korto**

“En iu dombesta korto estas anasoj, kokinoj kaj leporoj, entute 102 kapoj. Iu knabo kalkulis ties piedojn kaj trovis la entutan nombron de la piedoj de anasoj kaj leporoj 66, dum de kokinoj kaj leporoj 84. Kiom da anasoj, kokinoj kaj leporoj estas en tiu korto?”

Solvo

Ni notu per x, y, z la nombrojn de anasoj, kokinoj kaj leporoj respektive. Formiĝas la ekvacioj:

$x+y+z= 102$; $x+z= 66$; $y+z= 84$

Ni adiciu la du lastajn ekvaciojn.

$(x+y+z)+z = 66+84$

aŭ 102+z = 150

de kie

z = 48;

De la unua ekvacio, rezultiĝas

x = 66 – 48 = 18

kaj de la dua ekvacio

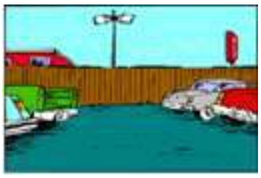
y= 84 – 48 = 36

Respondo: anasoj estas18; kokinoj 36 kaj leporoj 48

- **Parkejo**

(Simila problemo)

“En iu parkejo estis 34 motorcikloj kaj aŭtoj. Iu persono kalkulis ties radojn kaj ricevis la nombron 106. Kiom da motorcikloj kaj aŭtoj estas en la parkejo?”



Solvo:

La problemo povus solviĝi ankaŭ ĉimaniere:

Ni supozu ke ĉiuj veturiloj estas ja motorcikloj. Tiukaze, ili havus entute 34 *2 = 68 radoj. Fakte estas 106 radoj, aŭ 106-68 = 38 pli da radoj. Tio rezultiĝas pro fakto ke parto de veturiloj estas aŭtoj (kvarradaj). Tiam, la nombro de la aŭtoj estas
38 : 2 = 19 aŭtoj, dum motorcikloj estas 34-19 = 15
La pruvo:. 19*4 +15*2 =106.

Helpe de sistemo de ekvacioj, la solvado procedus kiel jene:

Se estas x motorcikloj kaj y aŭtoj

x+y = 34
2x+4y = 106

Ni multipliku la unuan ekvacion per 2 kaj substrahu de ĝi la duan ekvacion.

(2x+2y) - (2x+4y) = 68 - 106

-2y = -38

y= 19 aŭtoj

x = 34 - 19= 15 motorcikloj

Respondo: 15; 19

- **Bicikloj kaj tricikloj**

En iu vendejo oni ofertis 18 bicikloj kaj tricikloj. Ties entuta nombro de radoj estas 39. Trovu kiom da bicikloj aŭ tricikloj estas en ĝi?

Solvo:

Notinte per x kaj (18-x) la nombrojn de bicikloj kaj tricikloj ni formu la ekvacion:

2x + 3(18 - x) = 39

Liberigite de krampoj,

2x +54 - 3x = 39

Ni apartigu la nekonatajn terminojn

-x = 39- 54
-x = - 15

de kie

x = 15 ; 18-15= 3

Do, estas 15 bicikloj kaj 3 tricikloj

Eblas rezonadi ankaŭ tiel:

Se ĉiuj veturiloj estus bicikloj, ili havus entute 18*2 = 36 radoj aŭ 3 radoj malpli ol 39. Tio signifas ke estas ja tri tricikloj kaj 18-3 = 15 bicikloj.

- **Bildkartoj**

La gelernantoj de iu klaso interŝanĝis bildkartojn okaze de la Novjaro. Ĉiu lernanto sendis bildkarton al la ceteraj samklasanoj. Entute oni aĉetis 992 bildkartojn. Kiom da gelernantoj estis entute?

Respondo:

Unue mi sugestas pritrakti la jenan version pli simplan:

Kelkaj amikinoj interŝanĝis bildkartojn inter si, entute 20 bildkartojn. Kiom da ili estis?

Solvo
Ni trovu du nombrojn sinsekvajn kiuj, multiplikite, donas produkton 20. Ĉi tiuj nombroj estas 5 kaj 4. Do entute estis kvin amikinoj.
Simile, la pli lertuloj en multiplikado parkere povus serĉi du nombrojn sinsekvajn donantaj la produkton 992.
Ili ja estas 32 kaj 31 ĉar 32*31 = 992.
Tio veras ĉar ĉiu lernanto sendas bildkarton al la ceteruloj kiuj estas unu malpli ol la entuta nombro de lernantoj.

Se tio ne eblas estiĝi parkere, ni povus agi kiel jene:

Ni notu per N la nombron de la lernantoj:
Tiam, ĉiu lernanto estas sendinta (N-1) bildkartojn.
Entute N*(N-1) = 992 aŭ

$N^2 – N - 992 =0$

La pozitiva radiko de ĉi tiu ekvacio estas ::

$[1+\sqrt{1+3968}\,] / 2 = [1+ 63] / 2 = 32$

- **Manpremo**

12 viroj manpremas inter si. Kiom da manpremoj okazos?

Solvo
Ĉiu viro manpremas kun 11 ceteruloj, sed se A manpremas kun B, ankaŭ B manpremas kun A. Tiam entute oni konstatas 12*11/2= 66 manpremoj.

- **La geparoj**

  14 knabinoj kaj 12 knaboj dancas po du (knabo kun knabino). Kiom da geparoj diversaj povus formiĝi?

Solvo
Ĉiu knabino povas danci kun ĉiu knabo, sekve 14*12= 168 geparoj, aŭ ĉiu knabo povas danci kun ĉiu knabino, tio estas 12*14 = 168 geparoj.

- **Du poŝoj**

En ambaŭ poŝoj mi havas certan monsumon. Se mi demetas el la dua poŝo 40 Lekoj kaj enmetas ilin en la unuan poŝon, la monsumoj en ambaŭ poŝoj egaliĝas.

Kontraŭe, se mi demetas 40 Lekoj el la unua poŝo kaj enmetas ilin en la duan, en la dua poŝo la monsumo estos la duoblo de tiu de la unua poŝo. Kiom da mono estis dekomence en ĉiu poŝo?

Respondo:

Ni notu la monsumojn en ĉiu poŝo respektive per x kaj y.
Tiam ni ricevos la sistemon de ekvacioj:

$x + 40 = y - 40$
$2(x- 40) = y+40$

Nun ni substrahu de la unua la duan ekvacion
Tio eliminas y kaj donas

$x -120 = 80$ aŭ $\mathbf{x = 200}$

Anstataŭinte ĉe la unua ekvacio, ni trovas

$y = x+80$ aŭ $y = 200 +80 = \mathbf{280}$

Provu!

- **Pago**

Iu proprietulo kondiĉigis la pagon de sia laboristo kiel jene: por ĉiu labortago li donus 2400 Lekoj, dum por ĉiu malĉeesto li substrahus de la salajro de sia laboristo 600 Lekoj. Je la fino de monato 30 labortaga, rezultis ke la salajro konsistis el nul lekoj!. Ĉu vi povas diveni kiom da labortagoj faris efektive la laboristo?

Respondo:

Ni notu per x la nombron de la labortagoj kaj (30 - x) tiun de malĉeestoj.

Tiam 2400 x – 600 (30 - x) = 0

2400 x - 18000 +600 x = 0

3000 x = 18000

aŭ x = 6 tagoj estas laborinta la laboristo.

- **Reflektita horkampo**

Se nun la horloĝo notas 15-55, kioma estos ĝia reflektiĝo en la spegulo?

Solvo

20 - 05 (vidu la figuron)

Problemoj je "Regulo de trio"

Jen kelkaj problemetoj bezonantaj la aplikon de la rekta proporcio, aŭ kel dirite, de "La regulo de Trio"

- **Sonorado de la horloĝo**

Agim (albana nomo) posedis en sia hejmo horloĝon kun pendolo. Ĝi sonoris ĉiun horon tiomfoje kiom da horoj estis pasintaj, tio estas je la kvina ĝi sonoris kvin foje, je la dua du foje ktp. Agim notis la tempodaŭron de ĝia sonorado je la sesa kio rezultiĝis 10 sekundoj.
Ĉu vi povas diveni kiom da sekundoj daŭros la sonorado je la dekdua?

Atentu: ne hastu respondi tuje 20 sekundoj! Kial do?

Solvo

Je la sesan, estas aŭditaj ses sonoroj kiuj formas inter si kvin tempointervalojn. Agim estas ja mezurinta ĝuste la londaŭron de ĉi tiuj kvin intervaloj. Do, li povas skribi ke por kvin intervaloj bezonatas dek sekundoj.
Tiam por la dekdua horo estas 11 intervaloj kio sume bezonas je longdaŭron

11*2 = 22 sekundoj!

- **La segado de la trunkoj**

En iu segejo la arbotrunkoj devas segiĝi en pecoj je longeco unu metro. Iu laboristo kalkulis la tempodaŭron bezonata por la segiĝo de unu peco tia, kiu rezultiĝis unu minuton.
Ĉu vi povas diri kiom da minutoj bezonatas por segi trunkon je longeco 10 metroj?

Atentu: ne hastu diri ke ĉi laboro longas dek minutoj! La problemo solviĝas tutsimile al tiu de la sonorado de la horloĝo.

Solvo:

La trunko je longeco 10 m devas dispeciĝi en dek pecojn, sed la antaŭan kaj la finan ekstremojn kompreneble oni ne bezonas segi, do restas naŭ segoj kiuj longos naŭ minutoj.

- **Plej mallonga tempo**

La vojon de vilaĝo al la urbo iu kamparano realigis tiele:
la duonon perbuse je rapideco 40km/h kaj la ceteran duonon per ĉaro je rapideco 2 km/h.
Dume, alia kamparano trapasis la tutan vojon surpede je rapideco 4 km/h.
Kiu el du kamparanoj atingis pli frue la urbon?

Solvo:

Oni povas havi la impreson ke la urbon atingas pli frue la unua kamparano, ĉar li ja uzis ankaŭ buson. Sed la vero estas alie. Jen kion rezultigas la kalkulaĵoj.

La tempo bezonata por la unua estas (L/2) / 40 + (L/2) / 2 = 21L /80 (L- estas supozeble la longeco de la tuta vojo).

Dum por la dua kamparano ĝi estas L / 4 aŭ 20 L / 80.

Kiel vidite, la dua tempo estas malpli ol la unua. Do, en la urbon eniras pli frue la dua kamparano.

- **Markezo Guidon**

La markezo Guidon havis 3 filoj. Inter liaj posteuloj, 93 personoj havis po 2 filoj kaj neniun filinon, dum ĉiuj aliaj mortis, ne postlasinte heredintojn.
Kiom da posteuloj havis entute la markezo Guidon?

Solvo

Ĉiu posteulo heredinta infanojn, aldonas po tri posteuloj de la unua generacio kaj po 2 posteuloj pliaj. Ĉar 93 posteuloj havis filojn, tiam ili aldonis 2*93 = 186 personoj. Do entute ili estis 186 + 3 = 189 posteuloj.

Se ni prezentus tion per genealogia arbo, ni ekvidus ke el ĉiu kulmino de la arbo eliras du segmentoj aŭ neniu segmento. La entuta nombro de posteuloj egalas al la nombro de segmentoj en la arbo. Do ili estas 2 x 93 +3 = 189

- **La menuo**

Iu menuo enhavas 8 specojn de manĝaĵoj. Agron (albana nomo) decidis manĝi ĉiutage certan vicon da manĝaĵoj el 3 specoj ĉiufoje diversan al tiu de tago antaŭa. (tiucele sufiĉas por li anstataŭigi eĉ unu el la manĝaĵoj per nova, ekz. supon per fiŝo, salaton per vegetaĵoj, dolĉaĵon per fruktaĵo).
Kiom da tagoj li manĝos diversajn manĝaĵojn laŭmenue?

Solvo

Ni supozu ke la elektitajn manĝaĵojn Agron notas per plusoj dum la ceterajn manĝaĵojn per minusoj. Do, ĉiutage li havas tri plusojn kaj kvin minusojn (entute 8).
Ekz.

+ + + - - - - - -

aŭ

+ + - - - - + - k.t.p.

La serĉata nombro egalas al la nombro de la diversaj elektoj de la vico de plusoj kaj minusoj je komuna longo 8.
Ni rezonu ke kiel unuan manĝaĵon ni povas elekti unu el la ok disponeblaj manĝaĵoj. Kiel duan manĝaĵon ni povus ricevi unu el la sep ceteraj manĝaĵoj kaj kiel trian unu el la ses manĝaĵoj.
La unua manĝaĵo kombineblas tute sendepende al la dua kaj tria manĝaĵoj. Tial ni povas skribi 8*7*6.
Sed la manĝaĵovico ne influas (fiŝa supo, salato, dolĉaĵo estas tutegale al dolĉaĵo, fiŝa supo kaj salato). Tiu triopo povas kreiĝi per 1*2*3 vicoordoj, kio rezultiĝas de la supra rezonado, sur la unua loko povas esti unu el tri manĝaĵoj, sur la dua unu el la du restintaj kaj sur la tria loko la tria manĝaĵo.
Tial, definitive la serĉata nombro de la diversaj menuoj estas

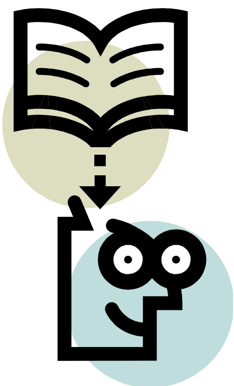
(8*7*6)/(1*2*3) = 56

> Ĉu vi povas tenti solvi la problemon kiam estas, ni supozu, 10 manĝaĵoj je dispono kaj la menuo konsistas el kvar manĝaĵoj ĉiutage?

- **La eraroj de la gelernantoj**

En iu klaso el 30 personoj oni okazigis diktadon kaj la instruisto notis la erarojn faritajn de gelernantoj.
Iu lernanto faris 12 erarojn, la ceteruloj malpli ol 12.
Provu ke en la klaso estas almenaŭ 3 lernantoj farintaj saman nombron de eraroj.

Solvo



Ni dividu la klason en 13 grupojn:
I lernantoj kiuj faris nenian eraron

II lernantoj farintaj unu eraron

III lernantoj farintaj 2 erarojn

Kaj tiel plu

XII lernantoj farintaj 12 erarojn

Do, ni havas 13 grupojn. Se en ĉiu unuopa grupo estas plejmulte du lernantoj farintaj la saman nombron de eraroj, rezultiĝus 2*13 = 26 lernantoj. Sed ni havas 30 lernantoj. Do, nepre estas ja grupo kun tri lernantoj.

- **La primoj**

Primo estas tiu nombro dividebla nur per 1 kaj si mem.
Ekz. 7 divideblas per 1 kaj 7 kaj per neniu alia nombro.
Dum 15 divideblas per 1, 3, 5 kaj 15,
do, krom 1 kaj 15 ĝi divideblas ankaŭ per aliaj nombroj.
Inter la paraj nombroj nur 2 konsideriĝas primo.

Nun, se la nombroj m kaj $m^2 + 2$ *estas primoj, tiam provu ke ankaŭ* $m^3 + 2$ *estas same primo.*

Solvo

Ĉiu primo $m \neq 3$ povas skribiĝi kiel 3n+1 aŭ 3n - 1, kie n estas entjero.
En la unua kazo, ni havas

$m^2 +2 = (3n+1)^2 +2 = 9n^2 +6n +1 +2 = 9n^2 + 6n +3.$

En la dua kazo

$m^2 +2 = 9n^2 - 6n +3$

Ĉar $m \geq 2$, rezultiĝas $m^2 +2 > 3$ kaj 3 dividiĝas per 3, rezultiĝas $m^2 +2$ estas neprimo, sekve $m^2 +2$ povas esti primo nur se $m = 3$.

En ĉi kazo $m^2 +2 = 11$ kiu estas ja primo.
Tiam $m^3 +2 = 29$ same primo.

- **Iracia nombro**

Iracia nombro estas tiu nombro kiu prezentiĝas kiel frakcion p/q kie p estas natura nombro (1,2,3,4,5....) kaj q entjero (±1, ±2, ±3,....). Dume, iracia nombro estas ĉiu nombro kiu maleblas prezentiĝi tiamaniere.

Pruvu ke $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ *estas iracia nombro.*

Solvo

Ni startu de la kontraŭa aserto.
Ni supozu ke

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

estas racia nombro, t.e.

$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} = p/q$ kie p, q estas entjeroj.

Tiam ni povas skribi $\sqrt{2} + \sqrt{5} = p/q - \sqrt{3}$.

Ni kvadratigu

$$(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 = (p/q - \sqrt{3})^2$$

$$2 + 2\sqrt{10} + 5 = p^2/q^2 + 3 - 2p\sqrt{3}/q$$

Aŭ dividinte per 2 kaj regrupigo

$$\sqrt{10} + p\sqrt{3}/q = p^2/2q^2 - 2 = p_1/q_1$$

(ĉar la dekstra flanko estas racia nombro).

Denove ni kvadratigu

$$(\sqrt{10} + p\sqrt{3}/q)^2 = p_1^2/q_1^2$$

$$10 + 3p^2/q^2 + 2p\sqrt{30}/q = p_1^2/q_1^2$$

De kie

$$\sqrt{30} = q/2p\,(p_1^2/q_1^2 - 3p^2/q^2 - 10)$$

Do, ĉar la dekstra flanko estas racia nombro, tiam ankaŭ $\sqrt{30}$ estas racia nombro. Sed tio ne veras ĉar $\sqrt{30}$ estas iracia (tio pruviĝas facilmaniere).

Sekve pruviĝas la vereco de la komenca aserto.

- **La unuoj**

Kiom da nombroj estas inter 0 kaj 9 999 999, el tiuj enhavantaj la ciferon 1, aŭ el tiuj ne havantaj la ciferon 1?

Solvo

Estas vidite ke la pli granda nombro estas 9 999 999 je sep ciferoj.
Tial ni konsentu skribi ĉiun nombron de 0 al 9 999 999 per sep ciferoj, aldonante zero antaŭe se tio estas necesa, ekz. 0 = 0 000 000; 137 = 0 000 137 ktp.

Ni kalkulu la kvanton de la nombroj enhavantaj unuojn.

Ĉiu tia nombro akiratas se ni skribas laŭvice sep ciferojn, ĉiu el ili povas ricevi naŭ valoroj.0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Do, sur la unua loko povas esti ĉiu el naŭ ciferoj menciitaj supre, samtiel sur la dua loko kaj laŭvice en la sepa loko. Ĉi tiuj lokiĝoj estas sendependaj unu disde la alia, pro tio entute estas $9^7 = 4\ 782\ 969$

Ĉar entute estas 10^7 nombroj je sep ciferaj, tiam la parto de nombroj en kies notado ne estas unuoj estas $9^7/10^7 = 0.478\ 2\ 969$.
Tial la parto de nombroj en kies notado estas unuoj transpasas 0.5, do rezultiĝas ke ĝi enhavas pli da tiaj.

- **La ralio**

Dum iu ralio tra cirkla dromo, rimarkiĝis ke la unu aŭto trapasis la dromon ene de unu minuto, dum la alia ene de unu minuto kaj 5 sekundoj. Komence la aŭtoj startas samtempe en la ralio. Post kiom da rotacioj de la unua aŭto ili denove startos kune?

Solvo

Temas pri 60 sekundoj kaj 65 sekundoj. Kompreneble la malplej granda komuna multoblo de ili estas 780 sekundoj.

Do, ĝuste post 780 sekundoj ambaŭ aŭtoj startos kune. Tio estas post 780/60 = 13 rotacioj de la unua aŭto aŭ post 12 rotacioj de la dua aŭto.

- **Itinero**

1	2	3	4	5
10	9	8	7	6
11	12	13	14	15
20	19	18	17	16

Rigardu ĉi tiun tabelon. Ni devas eniri en la kvadrateton je numero 1 kaj eliri tra la kvadrateto je numero 18, por ke ĉiamfoje ni trapasu la najbaran kvadrateton.

Ekz.. 1, 2, 9, 8, 13, 18.

Sed ĉikaze la sumo de la numeroj estas 1+2+9+8+13+18 = 51. Via tasko estas trovi alian itineron por ke la sumo de numeroj kiujn vi trapasas rezultiĝu 87!
Pruvu!

Ne hezitu, estas ja tiaj sumoj, trovu almenaŭ kvar tiaj!

- **La hotelĉambroj**

En la hotelo estas 22 ĉambroj, en ambaŭ flankoj de la longa koridoro je numeroj 1-22. La hoteldeĵoranto decidis akomodigi la gastojn ĉi maniere:
Nombrinte 1, 2, 3 li akomodigis 4 gastojn en la ĉambro nr.3.
Poste li daŭrigis per la ĉambro nr.4 nombrante 1, 2, 3. kaj akomodante en la ĉambron nr.6 kvar pliajn gastojn. Tiel li daŭrigis pluen kaj atinginte la okupitan ĉambron li ne prikalkulis ĝin dum la nombrado.
Ĉu restis neokupita ĉambro? Kiom da gastoj akomodiĝis en tiu hotelo?

Solvo

Imagu ĉiujn ĉambrojn lokitaj laŭ rekta linio.

1 2 <u>3</u> 4 5 <u>6</u> 7 8 <u>9</u> 10 11 <u>12</u> 13 14 <u>15</u> 16 17 <u>18</u> 19 20 <u>21</u> 22

Dividinte per 3, ni ricevas sep okupitajn ĉambrojn kaj restas unu.
Tiam, el 22 ĉambroj ni substrahas la sep okupitajn ĉambrojn, restas 15 ĉambroj. Kompreneble, 15 dividiĝas per 3, tial nombrante kiel antaŭe, nepre ni trafos okupitan ĉambron. Do, ĉiuj 22 ĉambroj okupitas ĉiu, de kvaropo da gastoj, t.e. entute de 88 gastoj. Jen la operacioj:

22 : 3 = 7(1) ;

22 - 7 = 15;

15 : 3 = 5

22 x 4 = 88 personoj

Problemoj uzantaj diversajn sistemojn de numeracio

Estas sciite ke, krom la sistemo de numeracio je bazo 10, ekzistas ankaŭ la sistemoj je aliaj bazoj, ekz. 2, 3, 4, 5, ktp.
Jen problemo uzanta ties ecojn.

- **La bazo de la sistemo**

Mia filo estas lerninta la sistemon de numeracio diversa al tiu decimala. Tial, anstataŭ la nombro 136 li skribas 253. Ĉu vi povas trovi la bazon de la sistemo per kiu operacias mia filo?

Solvo

Ni notu per **a** la bazon de ĉi tiu nova sistemo. Ĉar li skribas 253, tio signifas

$253_a = 2a^2 +5a +3$

Konforme al la kondiĉo, en la decimala sistemo tiu nombro notiĝas 136.
Ni formas la ekvacion

$2a^2 +5a +3 =136_{10}$

Aŭ

$2a^2 +5a -133 =0$

Aŭ

(a-7)(2a+19) = 0

El du solvoj, ni ricevas la pozitivan a =7
Do, la filo operacias en la sistemo je bazo 7

Pruvo: $2*7^2 + 5*7 + 3 = 2*49 + 35 + 3 = 98 + 35 + 3 = 133$

- **La ĉinaj nombroj**

Pripensu entjeron de 1 ĝis 26. Poste rigardu la ĉi suban tabelon kaj montru al mi nur la kvadratetojn kie troviĝas tiu nombro. Mi trovos la pripensitan de vi nombron. Kiel?

1	**4**	**7**	**2**	**5**	**8**	**3**	**4**	**5**
10	**13**	**16**	**11**	**14**	**17**	**12**	**13**	**14**
19	**22**	**25**	**20**	**23**	**26**	**21**	**22**	**23**
6	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**18**	**19**	**20**
15	**16**	**17**	**12**	**13**	**14**	**21**	**22**	**23**
24	**25**	**26**	**15**	**16**	**17**	**24**	**25**	**26**

Solvo

Mi trovos la pripensitan de vi nombron rezonante kiel jene:
Se la pripensita nombro estas en ĉi tiu tabelo, skribu flanke la nombron lokiĝanta sur la maldekstra angulo de la supra vico. Poste adiciu la skribitajn nombrojn.

Ekz.:
mi pripensis la nombron 16. Ĉi nombro troviĝas sur la unua kvadrateto supre kaj en la unua kaj dua kvadratetoj malsupre. Tiam mi adicias 1 + 6 + 9 = 16.

Ĉu vi povas ekspliki kie baziĝas ĉi tio?

Jen vidu:
Ĉiu nombro $n \leq 26$ estas malpli granda ol $27 = 3^3$. En la sistemo de numeracio je bazo 3, ni povas prezenti ĝin tiamaniere:
$n = (0, \text{aŭ } 1, \text{aŭ } 2)*3^o + (0, \text{aŭ } 1, \text{aŭ } 2)*3^1 + (0, \text{aŭ } 1, \text{aŭ } 2)*3^2$

Alivorte,

n = (0, aŭ 1, aŭ 2) + (0, aŭ 3, aŭ 6) + (0, aŭ 9, aŭ 18).

Ĉiuj nombroj entenantaj, en ĉi tiu prezentaĵo, la unuon estas adiciitaj en la unua tabelo, tiuj entenantaj 2 en la dua tabelo, tiuj entenantaj 3 en la tria tabelo, kaj tiel plu ĝis la sesa tabelo (6 ĉe la kvara, 9 ĉe la kvina, 18 ĉe la sesa).

Tial, la nombro n troviĝas adiciante la nombrojn troviĝantaj sur la maldekstra angulo de la tabeloj, kie ĝi estas.

Respondo:

Temas pri la sistemo de numeracio je bazo 3. La nombroj surtabele estas skribitaj ne laŭ bazo 10, sed laŭ bazo 3.

Ekz.

$10 = 1*3^2 + 1*3^{o.}$

Alie $22 = 2*3^2 + 1*3^1 + 1*3^{o.}$

Entute $N = (0,$ aŭ $1,$ aŭ $2) * 3^o + (0,$ aŭ $1,$ aŭ $2) * 3 + (0,$ aŭ $1,$ aŭ $2) * 3^2$

Do

$n = (0,$ aŭ $1,$ aŭ $2) + (0,$ aŭ $3,$ aŭ $6) + (0,$ aŭ $9,$ aŭ $18)$

Tial la nombroj en ĉiu kvadrateto havas ion komunan: la nombroj de la unua kvadrateto havas en sia dispartigo la ciferon 1, tiuj de ka dua kvadrateto la ciferon 2, de la tria la ciferon 3, en la kvara la ciferon 6, en la kvina la ciferon 9, en la sesa la ciferon 18.

Simile al ĉi tiu estas ankaŭ la sekvanta ekzerco:

- **La aĝo de infano < 16 jara**

2	8	4	1
3	9	5	3
6	10	6	5
7	11	7	7
10	12	12	9
11	13	13	11
14	14	14	13
15	15	15	15

Se vi aĝas malpli ol 16 jara, diru sur kiu kolono troviĝas la nombro montranta vian aĝon kaj mi eldiros kiom aĝa vi ja estas.

Solvo

Tiucele, mi adicias la ciferojn starantaj en la supra vico de ĉi tiuj kolonoj.
Fakte ĉi nombroj estas notitaj en la sistemo de numeracio je bazo 2.
Ĉiu entjero malpli granda ol 16 povas skribiĝi tiel:

$x_o *2^o + x_1 *2^1 + x_2 * 2^2 +x_3 * 2^3$

kie ĉiu cifero x_i (por i =0; i=1; i=2; i=3) havas valorojn 0 aŭ 1

Se $x_i = 1$, t.e. en la i-a kolono komenciĝanta de la nombro 2^i estas skribita la respektiva aĝo,
se $x_i = 0$, signifos ke tiu nombro ne aperas en iu kolono
(la kolonoj estas skribitaj per nombroj je hazarda enviciĝo: 1, 3, 2 kaj 0)

Ekz. se vi estas 13 jara, tiam la nombro 13 troviĝas en la dua kolono, same en la tria kaj la kvara. Rezulte

$13= 1*2^3 + 1*2^2 +0* 2^1 +1*2^o = 8 +4 +0+1$

Jen alia numertabelo skribita en la sistemo je bazo respektive 2, 8, 10, 16:

Bazo 2	**8**	**10**	**16**
0	0	0	0
1	1	1	1
10	2	2	2
11	3	3	3
100	4	4	4
101	5	5	5
110	6	6	6
111	7	7	7
1000	10	8	8
1001	11	9	9
1010	12	10	A
1011	13	11	B
1100	14	12	C
1101	15	13	D
1110	16	14	E

1111	17	15	F
10000	20	16	10
11111111	377	255	FF
11111010001	3721	2001	7D1

Ekzercoj kun la kvar simplaj aritmetikaj operacioj

- *Uzante tri unuoj, sen la operacio de multiplikado, rezultigu zeron.*

Respondo: (1 : 1) – 1 = 0

- *Uzante nur la adiciadon kaj ok kvarojn rezultigu 500*

Respondo: 444 + 44 + 4 + 4 + 4 = 500

- **La plej granda nombro**

Kiu estas la plej granda nombro kiu povas skribati per kvar unuoj?

Respondo

11^{11}= 2 85 311 670 611 > 280 bilionoj aŭ 250 milionoble pli ol > 1111

- *Kompletigu la malplenajn kvadratetojn de la tabelo trovinte unue la sekreton de la lokiĝado de la nombroj en ili*

- **Tabelo**

2	4	?	16	32	?	128
1	6	?	24	48	?	?

Respondo:

8	64
12	96 192

- *Trovu jaron en XX jc kiun, skribante per la ciferoj kaj rotaciante la paperon kie ĝi estas skribite je 180°, rezultiĝu la sama jaro*

Respondo:
jaro 1961

- *Surmetu la signojn plus kaj minus, tiamaniere ke la egalaĵo rezultiĝu nul:*

10   1   6   7   3   1   = 0

5   4   15   12   6   4   = 0

9   10   0   7   5   13   2   6   = 0

Respondo:

10 - 1 - 6 - 7 + 3 + 1 = 0

5 + 4 – 15 + 12 + 4 – 6 – 4 = 0

9 - 10 + 0 + 1 + 5 - 13 + 2 + 6 = 0

- **Trovu la mankantajn ciferojn en ĉi tiuj operacioj**

Multipliko

□   1   □

3   □   2

□   3   □

3 □ 2 □

□ 2 □ 5

1 □ 8 □ 3 0

Respondo

415
<u>382</u>
830
3320
<u>1245</u>
158530

Alia

□ □ □ □

□ 9

□ 7 5 4 7

□ □ □ □ □

2 5 8 8 6 □

Solvo

5 28 3
49

4 7 5 4 7
2 1 1 3 2

2 5 8 8 6 7

Divido

- □ 2 □ 5 □ : 325

□ □ □ 1□□

□ 0 □ □
□ 9 □ □

□ 5 □
□ 5 □

Respondo

52650 : 325 =162

325

2015
1950

650
650

- **Kiom da kvinoj**

Kiom foje aperas 5 en ĉiuj duciferaj nombroj?

Solvo

La duciferaj nombroj komenciĝas per 10 kaj kaj finiĝas per 99. La entenantaj ciferon 5 estas:

15; 25; 35; 45; 50; 51;52; 53; 54; 55; 56; 57; 58; 59; 65; 75; 85; 95

Do entute 19

Noto: Provu trovi parkere kiom foje aperas 4 aŭ 3 en ĉiuj duciferaj nombroj.

- **La cifero 2**

Sur la unua flanko de la strato staras 50 domoj je numeroj 1 ĝis 50. Kiomfoje ripetiĝas en ĉiuj ili la cifero 2?

Solvo

Atentu, de la numero 1 ĝis 10, la cifero 2 aperas unufoje, de 11-20 ĝi aperas dufoje, de 21-30 ĝi aperas dek foje, de 31-40 nur unu foje. Pli konkrete::

2; 12; 20; 21; 22; 23; 24; 25; 26; 27; 28; 29; 32; 42;

Entute 15 foje.

- **Kiom da jaroj?**

  Mi havas 1 bilionon[2] da dolaroj kaj mi elspezas 1000 dolarojn tage. Dum kiom da jaroj sufiĉus por mi tiu monsumo?

Solvo: Ni havas 1 000 000 000 : 1000 = 1 000 000 tagoj, kiu konvertite en jarojn egalas proksimume al 2379 jaroj!

- **La ducifera nombro**

Ĉu vi povas trovi duciferan nombron ab, tia ke ab - ba =27?

Solvo
Ni reskribu la numeron je formo 10a+b kaj 10b+a. Tiam ni ricevos la egalaĵon:

[2] Unu biliono = 1 000 000 000 dolaroj

10a+b –(10b+a)= 27

Demetinte la krampojn

10a +b -10b –a = 27

Faktoriginte

10(a-b) –(a-b) =27

aŭ

(a-b) (10-1) =27

a-b = 27: 9

a-b = 3

Ĉi tio estas la kondiĉo plenumenda de a kaj b

Ekz.

a=4; b=1	41
a=5; b=2	52
a=6; b=3	63
a=7; b=4	74
a=8; b=5	85
a=9; b=6	96

- **La stranga nombro**

Kiam ni dividas la kvaron per 2, same kiam ni substrahas de ĝi 2, rezultiĝas la sama 2. Kiu alia numero ĝuas ĉi econ se oni dividas kaj substrahas ĝin per 3 kaj rezultiĝas same 3?

Solvo

Laŭ la donitaĵoj, la nekonata nombro x devas kontentigi ĉi simplan ekvacion:

x/3 = x - 3

Ni multipliku per 3

x = 3x -9

aŭ

2x = 9

aŭ

x = 4.5

- **Sama rezultato**

Ĉu vi povas trovi numeron kiu, dividite per 4 kaj substrahite je 4, donas la saman rezultaton?

Solvo

La ekvacio akirus la formon:

x/4 = x-4

de kie

x = 4x – 16

3x = 16

x = 16/3

- **Kiom da infanoj?**

Ĉiu filo en iu familio havas tiom da fratoj kiom da fratinoj, dum ĉiu filino havas duoble pli da fratoj ol fratinoj. Kiom da infanoj estas en tiu familio?

Solvo

Ni notu per x kaj y respektive la nombron de filoj kaj tiun de filinoj en la familio. Tiam akireblas ĉi tiuj ekvacioj kun du variabloj.

$x - 1 = y$

$x= 2(y-1)$

Post la anstataŭigo de x en la dua ekvacio, ni ricevas

$y+1= 2(y-1)$

aŭ

$y+1 = 2y -2$

aŭ

$y = 3$

Ĉi kaze

$x= 3+1 = 4$

Do, estas 4 fratoj kaj tri fratinoj, entute 7 infanoj

- **Gefratoj**

En iu familio estas 5 filoj, ĉiu el kiuj havas po unu fratinon. Kiom da infanoj estas en tiu familio?

Respondo: 6 infanoj

- **Strangaj nombroparoj**

Rimarku la egalaĵon

*23 * 64 = 32 * 46.*

*Ĉi tie ab*cd = ba*dc ?*

Ĉu vi povas trovi aliajn duciferajn nombroparojn ĝuantaj ĉi econ?

Solvo

Ni reskribu la nombrojn je formo

(10a+b)(10c+d) = (10b+a)(10d+c)

Demetinte la krampojn

100ac +10ad +10bc + bd = 100bd +10 bc + 10ad + ac

Ĝi reduktiĝas al 10bc kaj 10ad kaj faktoriĝas

100 (ac - bd) – (bd - ac) = 0

(ac - bd) (100 + 1) = 0

Rezultiĝas

ac-bd=0

aŭ

ac= bd

Ĉi egalaĵo esprimas la kondiĉon plenumenda de a, b, c kaj d.
Tiam ni povas preni a =3 kaj c =6. Samtiel b=9 kaj d=2 ĉar 3*6= 9*2
Tiam

39*62 = 93*26

Alie, ni prenu

a=4, c=3 kaj b=6 kaj d=2 ĉar 4*3= 6*2

Tiam ni havos

46*32 = 64*23

Pruvu!

- **Kvin entjeroj**

Trovu kvin entjerojn sinsekvajn plenumantaj la kondiĉon:

$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 + e^2$

Solvo

Ni notu per x la entjeron staranta en la mezo kaj per (x-1), (x-2), (x+1) kaj (x+2) la ceterajn. Kompreneble, ĉi entjeroj kontentigas la ekvacion:

$(x+1)^2 + (x+2)^2 = x^2 + (x - 1)^2 + (x - 2)^2$

Post reduktiĝoj, ĝi ricevas la formon

x(x-12) =0

La solvoj estas

X = 0 dhe x = 12

Por x = 0 akireblas la jena vico:

-2 -1 0 1 2,

dum por x=12:

10; 11; 12; 13; 14.

- **La botelo kun medikamento**

Botelo kun medikamento kostas 100 Lekoj. La medikamento mem kostas 90 Lekojn pli ol la botelo malplena. Kiom kostas la medikamento kaj kiom la botelo?

Solvo:

x Lekoj kostas la malplena botelo,

x+90 Lekoj kostas la medikamento,

do

$2x+90 = 100$

de kie

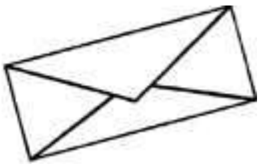
$x= 5.$

Do, la botelo kostas 5 Lekojn kaj la medikamento 95 Lekoj.

- **Leterkoverto**

(simila problemo)

Leterkoverto plus la poŝtmarko kostas 55 Lekoj. La poŝtmarko kostas 50 L pli ol la leterkoverto. Kiom kostas la leterkoverto kaj kiom la poŝtmarko?



Solvo

La diferenco je 5 Lekoj duoniĝas, tiam la leterkoverto kostas 2.5 Lekoj kaj la poŝtmarko 52.5 Lekoj.

Aŭ ni notu per x la valoron de la leterkoverto kaj y tiun de la poŝtmarko.

Tiam

x + y =55.

Sed

y = x +50.

Anstataŭginte, rezultiĝos:

x + (x + 50) = 55

de kie

2x = 5 kaj x + 2.5;

y= 2.5 +50 = 52.5

- **La trajno sur la ponto**

Trajno je longeco 750 m trapasas la ponton je longeco 150 m kun rapideco je 45 km/horo. Dum kiom da minutoj ĝi trapasas la tutan ponton?

Respondo

La tuta vojo trapasenda estas egala al tiu de la ponto mem plus la longeco de la trajno, t.e. 750 +150 = 900 m = 0.9 km, ĉar la trajno devas forlasi kiel tuton la ponton.

Tiam

0.9 km : 45 km/horo = 0.02 horoj aŭ 1.2 minutoj

- **La rapideco de la trajno**

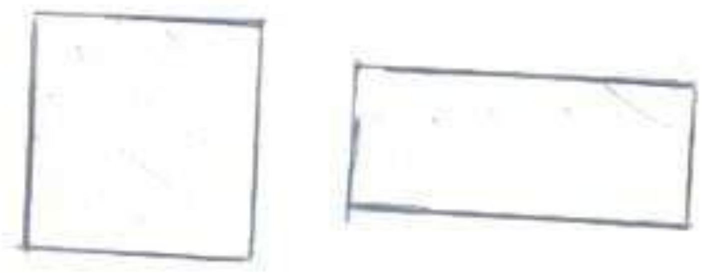
Trovu la rapidecon de la trajno se estas sciite ke ĝi dum 1 kaj 1/3 horoj trapasas 64 km.

Solvo

Sufiĉas fari unu dividon 64 km / (4/3) = 48 km/horo

- **Plej granda surfaco**

Kvadrato kaj rektangulo havas ĉiu perimetron po 84 cm. Kiu el ili havas plej grandan surfacon?



Solvo

La kvadrato havas eĝon je longeco 84 : 4 = 21 cm, do ties surfaco estas

$21^2 = 441\ cm^2$

Dume, la rektangulo ĝenerale havas eĝojn je longeco x kaj (42 - x) t.e. la surfacon

$x(42-x)= 42x- x^2$

kiu ricevas diversajn valorojn, depende de x.

La plej grandan valoron ĝi ricevas por

$x= (-b/2)a$

kie

$b= 42$ kaj $a= (-1)$,

do, x= -42 /(-2)= 21.

Do, ĝenerale, la rektangulo havas malpli grandan surfacon ol la kvadrato je sama perimetro.

Du trajnoj

Du kargotrajnoj je longeco 250 ĉiu el ili, moviĝas unu kontraŭ la alia je sama rapideco 45 km/horo. Kiom da sekundoj bezonatas ĝis kiam la konduktistoj de la ties lastaj vagonoj renkontiĝu post kiam estas renkontiĝintaj la du unuaj trajnotiristoj.


Solvo

La trapasita vojo estas

250 +250 = 500 m.

La komuna rapideco estas (45 +45) = 90 km/horo = 90 000m /3600 sek = 25 m/s

Tiam, la tempo

t = 500 : 25 = 20 sekundoj.

- **Du naĝantoj**

Du naĝantoj samlertaj naĝas unu en la rivero, la alia en la lago, trapasante ĉiu el ili saman longecon, iri kaj reen. Kiu el ili revenas la unua?


Solvo

Ni notu per x la rapidecon de la rivero, per v la rapidecon de la naĝanto, per s la vojlongecon.
Tiam la tempodaŭroj por iro estas respektive:

s/v kaj s/(v+x),

dum la tempodaŭroj por reveno

s/v dhe s/(v-x).

La tempoprofito de la naĝanto dum la iro en la rivero estas

s /v – s /(v+x) = xs / v(v+x)

dum la tempoperdo dum reveno estas

s / (v-x) – s /v = xs/ v(v-x).

Sed
s /v(v+x) < s /v(v-x) ĉar v > x.

Do, la perdo estas pli granda ol la profito

Sekve, pli frue revenas la naĝanto en la lago.

Noto:
se v ≤ x , la naĝanto en rivero apenaŭ reveneblus.

- **Motorbarko**

Motorbarko trapasas certan vojon en rivero laŭ la fluo dum du horoj kaj kontraŭ la fluo dum 3 horoj. Dum kiom da horoj ĝi trapasos ĉi longecon ire kaj revene en serena akvo?

Solvo

Ni notu per v la rapidecon de la fluo kaj per v’ la rapidecon de la barko en la serena akvo. Tiam, dum iro la rapideco estas v+v’ kaj dum je reveno v’-v, supozante ke la rapideco v’>v.

Se ni notu per s la vojlongecon, ni havos

s /(v+v') = 2 kaj s / (v'-v) = 3

de kie

(v+v') /s = ½ kaj (v'-v) /s = 1/3

aŭ

v /s + v' /s = ½ kaj v' /s – v /s = 1/3 .

Adiciante ĝin flankalflanke, ni ricevos

2v' /s = 5/6

aŭ

s /(2v') = 6/5

aŭ

s /v' = 12/ 5

aŭ

2s /v' = 24 /5 = 4^{h} 48'

- **Plidiluado la kemia solvaĵo**

Solvaĵo je koncentreco 12% devas plidiluiĝi ĝis 10%. Kiom da akvo oni devas aldoni en ĝin tiucele?

Respondo

Se ni scius anticipe kioma estas la originala maso de la solvaĵo, ekz. 1 kg, ni povus agi tiel:
Ni notu per x g la aldonan akvokvanton. Kompreneble, la maso de la salo en ĝi estas aktuale 12% *1000 g = 120 g.
Tiam

$120 /(1000 +x) = 0.10$

aŭ

$1000 +x = 10 *120 = 1200$

aŭ

$x = 1200 -1000$

$x = 200$ g.

Ĝenerale, kiam la originala maso de la salo estas nekonata, ekz. ĝi estas m, tiam la akvokvanto aldonenda, rezoninte similmaniere, rezultiĝos $x = 5/3$ m, kie m estas la maso de la salo.

- **La domenfiguro**

Elektu hazardmaniere domenfiguron. Kioma estas la punktosumo je plej granda probablo?

Solvo
La punktosumoj povus esti respektive 0;1;2;3;4;....10;11;12 kiuj havas eventoftecon respektive 1; 1; 2; 2; 3; 3; 4; 3; 3; 2; 2; 1; 1.
Do plej grandan probablon havas 6 ĉar 6 = 6 + 0 = 5 + 1 = 4 + 2 = 3 + 3

- **La gantujo**

En iu gantujo estas 6 tutsimilaj paroj da gantoj kiuj estas disĵetitaj tien separate. Kiom da gantoj mi devas elpreni, okulfermite, por ke mi ekhavu almenaŭ paron da taŭgaj gantoj (t.e. unu por la dekstra kaj unu por maldekstra manoj).

Respondo

Sep

- **La ŝtrumpujo**

En iu ŝtrumpujo estas disĵetitaj separate: 6 paroj da ŝtrumpoj verdkoloraj, 5 paroj da ŝtrumpoj ruĝkoloraj kaj 4 paroj da ŝtrumpoj nigrakoloraj.
Kiom da ŝtrumpoj unuopaj mi devas elpreni el la ŝtumpujo, okulfermite, por ke mi ekhavu unu taŭgan paron da ŝtrumpoj.
(kompreneble la ŝtrumpoj por la dekstra kaj maldekstra piedoj ne diferencas unu de la alia)

Respondo:

4

- **Maksimumo**

Trovu la maksimumon de la algebra esprimaĵo:

$5 - (x+2)^2$

Solvo:

La esprimaĵo $(x+2)^2$ estas ĉiam pozitiva. Ties plej malgranda valoro estas zero.
Tial la maksimumo serĉata por nia esprimaĵo estas 5

- **La prezaltiĝo**

La prezo de iu varo altiĝis trifoje, pli ĝuste:

40 %, 20 %, 10 %.

Kiom da % ĝi entute altiĝis?

Solvo

Ĝi estis a, fariĝis 1.4 a, poste fariĝis 1.2*1.4a = 1.68 a, finfine fariĝis 1.68*1.1 a = 1.848 a, do ĝi altiĝis 85%

- *La prezo de iu varo altiĝis unue 40%, poste malaltiĝis 20%. Kiam la prezo estis pli alta, nun aŭ antaŭe?*

Solvo

La prezo estis a, poste fariĝis 1.4 a, pli poste fariĝis 1.4a*0.8= 1.12 a .
Do nun ĝi kostas pli ol antaŭe, je maso 12%.

- **Aĉetebleco**

Kiam la prezoj altiĝis 12 %, la salajro de sinjoro X altigixs 22 %.
Kiom da % altiĝis lia aĉetebleco?

Solvo

Se la salajro de la sinjoro X ne plialtiĝus, lia aĉetebleco malpliiĝus je raporto

1 /(1+0.12).

Ĉar la antaŭa salajro de sinjoro X plialiĝis je (1 + 0.22), tiam la aĉetebleco fariĝis (1+0.22) /(1+0.12) = 1.22 /1/12 , proksimume 1.089 foje.

Do, la aĉetebleco lia plaltiĝis proksimume 8.9 %

- **Kestoj kun pomoj**

El ses kestoj kun samnombro da pomoj oni eltiris, el ĉiu kesto, la samon kvanton je 60 pomoj. En ĉiuj kestoj restis entute tiom da pomoj kiom da ili estis komence en du kestoj. Kiom da pomoj havis ĉiu kesto dekomence?

Solvo

Ni supozu ke ĉiu kesto havis komence po x pomoj.
Nun, en ĉiu el ili restis po (x-60) pomoj.
Por y kestoj, tio estas y (x-60) aŭ 2x.
Ni egaligu la ambaŭ esprimaĵojn kaj evidentigu

y = 2x /(x-60)

Ĉar y estas natura nombro, estas necese ke (x-60) estu:
para nombro, same pozitiva, ≥ 60 kaj divizoro de x.
Estas multaj solvoj, kiel ekz. :
62, 64, 66, 70,
donantaj por y la valorojn. 62; 32; 22; 14; ktp.

- **Birdoj**

De iu arbo al la alia flugis 5 birdoj. Poste de la alia arbo al la unua flugis 7 birdoj. Tio rezultigis ke en la unua arbo restis duoble pli da birdoj ol en la dua arbo. Kiom da birdoj havis dekomence ĉiu arbo?

Solvo

x birdoj ĉe la unua arbo, y birdoj ĉe la dua arbo
Ni formu la sistemon

$x-5 +7 = 2 (y+5-7)$
$x \geq 5$
$y \geq 0$

Ni havas
$x+2 = 2(y-2)$
$x+2= 2y -4$
$x= 2y-6$

x devas esti pozitiva nombro ≥ 5. Do, 2y-6 ≥ 5 aŭ 2y ≥ 11 aŭ y ≥ 5.5. Sed ankaŭ y devas esti entjero, do la solvo povas esti y= 6; 7; 8;..... kaj x= 6; 8; 10;

- **La vojo**

Post kiam la pasaĝiro trapasis la duonon de la vojo, li ekdormis. Vekiĝinte, li rimarkis ke restis ankoraŭ la duono de la vojo trapasita dum la dormo. Kiun parton de la vojo trapasis la pasaĝiro dumdorme?

Solvo

La dormotempo, kiel vidite, apartenas al la 2/3 de la duono de la vojo. Do, dumdorme li trapasis 1/3 de la tuta vojo.

- **Trovu la sumon**

Trovu la sumon de ĉiuj triciferaj nombroj!

Solvo

La unua tricifera nombro estas 100, la lasta 999. Ili formas aritmetikan progresion je diferenco 1. Konforme al la formulo

$S_n = [(a_1 + a_n) / 2]*n$

Ni ricevos:

= (100+999)*900/2= 1099*450 = 494550

- **Kiom jara estas Agron**[3]

18 jarojn antaŭe, Agron estis trioble pli aĝa ol sia filo, dum hodiaŭ li estas nur duoble pli aĝa ol la filo. Kiom aĝa estas Agron?

Solvo

La diferenco de la aĝoj ne ŝanĝiĝas dum la tempopaso. Ni notu per x la aĝon de Agron hodiaŭ, tiam (x-18) estis lia aĝo antaŭ 18 jaroj.
Ni notu per y la aĝon de ties filo, do (y-18) estis la filo antaŭ 18 jaroj.

$x= 2y$
$x-18 = 3(y-18)$

Ni anstataŭigu
$2y-18 = 3y -54$

Rezultiĝas $y = 54-18 = 36$
$x= 2*36= 72$

Do, Agron estas 72 jara dum sia filo 36 jara.

- **Rilatumo (raporto) de la volumenoj**

Du kaldronoj faritaj el la sama materialo kaj je sama dikeco havas kapaciton unu la okoblon de la dua. En kiu rilatumo estas iliaj masoj?

Solvo

---
[3] albana persona nomo

La masoj de la kaldronoj dependas se iliaj surfacoj, se ilia dikeco estas la sama. Sed la surfacoj ŝanĝiĝas proporcie al la kvadrato de la rilatumo de iliaj dimensioj. Dume la volumenoj ŝanĝiĝas proporcie al la kubo de la rilatumo de iliaj dimensioj.
Ni havas la rilatumon de la volumenoj, kiu estas 8, sekve la rilatumo de la dimensioj estas $\sqrt[3]{8} = 2$.
La dua potenco de 2 estas 4.
Do la rilatumo de la masoj estas 4 : 1

- **La plej malgranda frakcio**

Trovu la plej malgrandan frakcion inter la ĉi sube notitaj:

850/958 ; 849/958 ; 849/959 ; 851/961 ; 85/95 ; 85/96 ; 9/10.

Solvo

849/959

- **La plej granda frakcio**

Trovu la plej grandan frakcion:

4/5 ; 8/11 ; 41/51 ; 45/55 ; 401/501 ; 399/499 ; 451/551 ; 501/627 ;

Solvo

451/551

- **La pilko**

Se oni kontribuus po 60 Lekoj, la knaboj ne povus aĉeti la pilkon ĉar mankus 30 Lekoj. Sed se oni kontribuus po 70 Lekoj, la pilko aĉeteblus kaj restus ankoraŭ 40 Lekoj. Kiom kostas la pilko?

Solvo

Ni supozu ke entute estas x knaboj. Tiam formiĝas la ekvacio

60x +30 = 70x -40

Tio donas 10x = 70 kaj x = 7

La pilko kostas 60*7 +30 = 420 + 30 = 450 L

- **Prunoj kaj piroj**

  3 prunoj plus 1 piro pesas tiom, kiom 2 piroj plus 1 pruno. Entute ili pesas 700 g. Kiom pesas unu pruno kaj unu piro?

Solvo

Ni notu per x kaj y la prezojn de pruno kaj piro respektive. Ni formu la ekvaciojn:

3x +y = x+ 2y
x +y = 700

aŭ

2x -y = 0
x +y =700

Ni adiciu ambaŭ flankojn

3x = 700

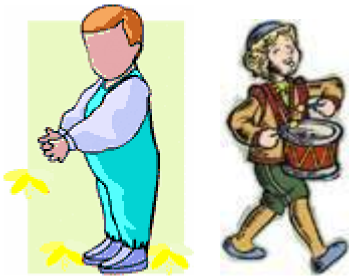
Rezultiĝas x= 700/3 kaj y = 700 - 700/3 = 1400 /3

Simila problemo

- *Unu pruno plus du piroj pesas tiom, kiom unu piro plus unu pruno, plus 100g. Entute ili pesas 400 g. Kiom pesas unu pruno kaj unu piro?*

- **La paŝoj**

La knabino havas paŝon je 10% malpli longa ol tiu de la knabo, sed ŝia rapideco (la nombro de la paŝoj per minuto) estas je 10 % pli granda.
Kiu el ambaŭ ili atingos la difinitan lokon la unua?



Solvo

Kiam la knabo pasas 10 paŝojn je longeco **a** por ĉiu paŝo, la vojo trairita estas 10a, dum la knabino farinte 11 paŝojn je longeco **0.9 a** por ĉiu paŝo ŝia, trapasas vojon longan je 11*0.9a = **9.9a**.
Do, la knabino trapasas vojon longan 9.9 a kiam la knabo estas trapasinta 10 a. Definitive, la knabo atingas la cellokon la unua.

- **La kolono el kubetoj**

Unu m^3 disdividiĝas en kubetojn po unu mm^3 kaj ĉi lastaj surmetiĝas unu super la alia. Kiom alta fariĝas la kolono?

Solvo

1 m^3 enhavas 1000^3 mm^3 = 1 000 000 000 mm^3
1 000 000 000 mm = 1 000 000 m = 1000 km

- **Trovu rapide la sumon**

$$\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\frac{1}{3*4}+.....+\frac{1}{(n-1)*n}+....=$$

Solvo

Ni esprimigu ĉiun terminon kiel diferencon kiel jene:

$\frac{1}{1*2} = 1 - \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2*3} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}$; ktp.

Adiciinte, reduktiĝas ĉiuj terminoj, escepte de la unua 1 kaj la lasta $\frac{1}{n}$

Do la sumo estas $1 - \frac{1}{n}$

- **Kiu estas**

Tiu entjero, kiu valoras sepoble pli ol la valoro de siaj unuoj?

Solvo

Ni notu la nombron tiel: □□□□□**.....a**
Ĉi tie **a** estas la nombro de la unuoj
Ni supozu ke **n** estas la nombro de dekoj, tiam la nombro notatas **10n+a** kaj devas egaliĝi al **7a**, do ni havas

10n + a = 7a

10n = 6a
n = 0.6 a

Kiel n, tiel ankaŭ a estas entjeroj, eĉ a<10.

Tiam, a ne povas esti 1, nek 2, nek 3 nek 4, nek 6, nek 8, nek 9, sed nur 5. Ĉi kaze rezultiĝas n = 3
La serĉata nombro estas 35

- **La ralio**

Du aŭtoj startas samtempe je la 10-00 horo. Sed la unua estigas 10 rotaciojn ene de horo, dum la dua 13. Post kiom da minutoj ili restartos kune denove?

Solvo

Unu rotacion la unua aŭto estigas dum 1/10 horo, dum la dua 1/13 horo, aŭ 60/10 = 6 minutoj kaj 60/13 minutoj respektive.
La malplejgranda komuna multoblo (6,60/13) = 360/13 minutoj

Tiam, post 360/13 minutoj (27.7 minutoj) ambaŭ aŭtoj restartos denove kune. Do en 10+360/13, proksimume 10^h-27.7

- **La interŝanĝo de la lokoj**

Ducifera nombro havas la sumon de la ciferoj 11. Se ni ŝanĝus la lokojn de la ties ciferoj, la nombro malpliiĝus je 45. Kiu estas tiu nombro?

Solvo

Ni notu la nombron tiel: ab = 10a +b
Se ni interŝanĝus la ciferlokojn, ĝi notiĝas ba= 10b+a

Aliflanke a+b =11

Formiĝas la sistemo

a+b=11
10a+b= 45 +10b+a

aŭ

10(a-b) –(a-b) = 45
9(a-b) = 45
a-b= 5

Asociiginte ĉi ekvacion kun a+b=11, ni trovos 2a= 16 kaj a = 8.
Rezultiĝas b = 3

La nombro estas 83

- **La malplej kosta**

Unu varo kostas je 50% pli kare ol la alia. Kiom da % malpli kare estas la dua varo?

Solvo

Noto: Ne hastu diri ke la dua varo kostas same 50 % malpli kare ol la unua... Jen kial:

Ni notu per A la prezon de la dua varo. Tiam la unua kostas 1.5 A
Ni notu per B la prezon de la unua varo, do B = 1.5 A, de kie A = 1/1.5A aŭ 0.66A kio rezultigas ke A kostas proksimume 34 % malpli kare ol B.

- **La ekzamenaj poentoj**

Oni diktis la jenan regulon en iu ekzameno: por ĉiu solvita problemo la lernanto akirus 5 poentojn kaj por ĉiu erara solvo oni substrahas 3 poentojn.
Fine, por dek problemoj, la lernanto akumulis 34 poentoj. Kiom da problemoj estas solvinta la lernanto?

Solvo

Ni notu per x la nombron de la solvitaj problemoj kaj per (10-x) tiun de la nesolvitaj problemoj. Tiam

$5x - 3(10 - x) = 34$
aŭ
$5x - 30 + 3x = 34$
aŭ
$8x = 64$
aŭ
$x = 8$

- **La kalendaro**

En iu insulo la loĝantoj dividis la jaron en 12 monatojn kun 30 tagoj ĉiu monato.

En la najbara insulo la jaro havis 13 monatoj kun kvar semajnoj ĉiu monato.
La loĝantoj de la unua insulo elektis sian reĝon por tempoperiodo je 7 jaroj, unu monato kaj 18 tagoj, dum tiuj de la dua insulo por 6 jaroj, 12 lunoj[4] *unu semajno kaj 3 tagoj.*
Kiel pensas vi, kiu tempoperodo estas pli longa?


Gordon Gahan/Photo Researchers, Inc.

Solvo

Por la unua insulo la tempoperiodo longas 7*12*30 + 1*30 +18 = 2568 tagoj.
Por la loĝantoj de la dua insulo tio longas 6*13*4*7 +12*4*7 +1*7 +3 =2530 tagoj.

Kompreneble, la plej longa estas la tempoperiodo de la regado en la unua insulo

- **Ridaĵo**

Iu virino diris al siaj amikinoj:
"Mi ne kutimas atesti alian aĝon ol la vera. Kiam mi edziniĝis, mi estis 17 jara, dum mia edzo estis 34 jara, tio estas duoble pli aĝa ol mi. Nun mia edzo aĝas 70 jara kaj mi havas ties duonon, tio estas, 35 jara!"
Ĉu ŝi diris la veron?


Steve Allen/Gamma Liaison

Respondo:

[4] Luno longas kvar semajnoj

La virino eraras, ĉar la diferenco je aĝo 34 – 17 = 17 ne ŝanĝiĝas dum la tuta vivo, do ŝi hodiaŭ aĝas 70 – 17 = 53 jara!

- **La optimuma aĝo por geedziĝo**

Iu proponis ke la aĝo de la novedzino devas esti la duono de tiu de la edzo plus 7. Tio estas, se la edzo estas 28 jara, la novedzino devas aĝi 28 : 2 + 7 = 21 jara.
Ĉu vi povas trovi, kiom aĝa devas esti la edzo se la novedzino estas 24 jara?

Respondo

Ni notu per **v** la aĝon de la novedzino kaj **d** tiun de la novedzo. Espriminte inverse la aĝon de la edzo rilate al tiu de la novedzino, ni akiras la formulon:

$V = d : 2 +7$

Kio rezultigas

$d = 2 (v – 7)= 2 (24 - 7)= 34$ jara!

- **La aĝo de la geparo**

La sumo de la aĝoj de la geparo estas 91 jara. Kiam la edzo aĝis tiomjara, kiom la edzino estas hodiaŭ, ĉi lasta havis la duonon de la hodiaŭ aĝo de la edzo.
Kiom aĝa estas la edzo hodiaŭ?

Solvo

Ni notu per **x** kaj **y** la aĝojn de la edzino kaj edzo respektive.
Kompreneble $x<y$ kaj la diferenco estas $(y – x)$.
Do, $(y – x)$ jarojn antaŭe la edzino estis

$[x – (y - x)]$ aŭ $\frac{1}{2}$ y.

Aliflanke,

$x+y = 91$.

La solvo de la sistemo estas $y = 52$ jara kaj $x = 39$ jara.

- **Dividu la horkampon**

Per du rektoj dividu la horkampon en tri partojn tiamaniere ke la sumo de la hornombroj en ĉiu parto estus je sama valoro

Solvo

Unu rekto supre de 8, 7, 6, 5 kaj alia rekto sub 11, 12, 1, 2

- **La plej malgranda nombro**

Kiom estus la nombro kiu, dividite per 2; 3; 4; 5 kaj 6, donas kiel reston respektive la nombrojn 1; 2; 3; 4 kaj 5?

Solvo

Ni supozu ke la nekonata nombro estas **n**. Ĉar kiam n dividiĝas per 2 donas kiel reston 1, la nombro (n+1) dividiĝas per 2.
Samtiel, kiam ĝi dividiĝas per 3 donas reston 2, tiam (n+2) dividiĝas per 3, ktp.
Same, (n+1) dividiĝas per 4, 5 kaj 6.
Sed la malplej granda komuna multoblo de 2, 3, 4, 5 kaj 6 estas 60.
Tiam la serĉata nombro estas unu malpli, tio estas 59.
Pruvu!

- **La kvociento**

Se ni pliigas la dividaton je 65 dum la dividanton je 5, la kvociento, ankaŭ la resto ne ŝanĝiĝas. Kiom estas ĉi kvociento?

Solvo

Ni notu per **D** la dividaton, per **d** la dividanton, per **q** la kvocienton kaj per **r** la reston.
Laŭ la kondiĉo de la problemo

$D = qd + r$

$D+65 = q(d+5) + r$

Ni substrahas de la dua egalaĵo la unuan

$65 = 5q$

De kie

$q = 13$

Praktikaj problemoj

- **La plej kurta vojo**

Ni prikonsideru duoncirklon kaj tri duoncirkloj sur la diametro je radio kiom la triono de la radio de la granda duoncirklo. Kiu estas plej longa, la granda duonarko aŭ la sumo de tri malgrandaj duonarkoj?

Solvo:

La formulo kiu donas la cirkonferencon de la cirklo estas P = 2π R

La duoncirklo havas perimetron je π R
La malgrandaj duoncirkloj je radio r = 1/3 R havas sumon de siaj cirkonferencoj:
P = 3* π*R/3= π R
Do, la vojo estas samlonga!

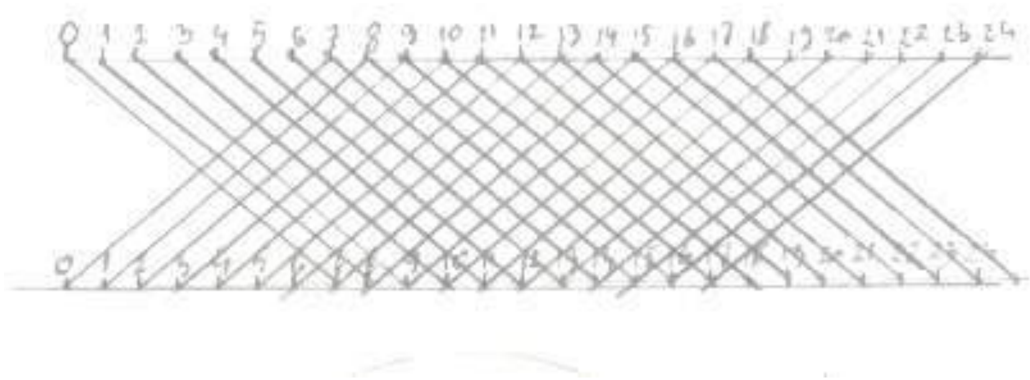
La renkontiĝo de la ŝipoj

- *Ni supozu ke de la haveno de Havre en Francio ĉiun tagmezon ekiras ŝipo al Novjorko (Usono) kaj samtiel samtempe de Novjorko ekiras je direkto de Havre, alia ŝipo. La navigado de ĉiu ŝipo longas sep tagojn. Ĉu vi povas trovi kiom da ŝipoj de la markompanio renkontiĝas dumvoje?*
-

Respondo

15 ŝipoj, el tiuj 13 dumvoje kaj 2 en la havenoj.
Evidentiĝas ĉi tio, se ni desegnos du paralelaj segmentoj kaj notas sur ili la ciferojn 0,1,2,3,4,5,6, ...kaj kunigas per segmento la nombron 0 de la segmento malsupre kun la nombro 7 de la segmento supre, la nombron 1 de la segmento malsupre kun la nombro 8 de la segmento supre kaj inverse.



- **La gastransportilo pesas malpli, kiam ĝi estas plena ol malplena!?**

  Cilindra gastransportilo je volumeno 50 m3 pesas sen gaso 10 tunoj. Se ĝi pleniĝas per gasa hidrogeno pesos malpli, ol kiam ĝi pleniĝis nur per aero. Ĉu vi scias kial?

Solvo

1 m^3 da hidrogena gaso pesas 100 g, 50 m^3 pesas 5 kg.
Aliflanke, 1 m^3 je aero pesas 65 kg kaj 50 m^3 aero pesas 50 x 65 kg = 3250 kg!

- **La pikniko**

  Pol ekiris je la 9-a horo per biciklo de la urbo A al la urbo B je rapideco 15 km/h. Je la 9-45 horo, Pjer ekiris de la urbo B al la urbo A je rapideco 20 km/h.

Ili estis konsentintaj inter si renkontiĝi por pikniki en la mezo de la vojo AB, kaj tiel okazis.
Trovu, je kioma horo ili renkontiĝis.

Solvo

A-----------------------------------M--------------------------------------B
→ horo 9-00, 15km/h   horo 9-45, 20 km/h ←

Ni notu per x = AM la duonon de la tuta vojo.
Tiam, x/15 estas la tempodaŭro de la biciklado de Pol, dum la tempodaŭro de Pjer estas x/20, ĝis la vojomezo.
La diferenco, laŭ kondiĉo, estas 45 minutoj aŭ 0.75 h.
Tio sugestas ke ni solvu la ekvacion:

$x/15 = x/20 + 0.75$

de kie ni ricevas

$x = 45$ km.

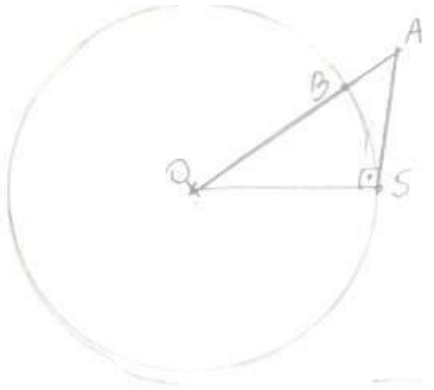
Tiam 45/15 = 3 h.

Ili renkontiĝis je 9+3= 12 h

- **La lumturo**

El la lumtura pinto je alteco 125.7 m vidiĝas la horizonta linio. Kiom fore troviĝas tiu linio se ni supozas ke la tera surfaco estas sferoforma kaj ties granda cirklo longas 40 000 km.

Solvo



Ni supozu ke la lumtura pinto estas A, S estu punkto en la horizonta linio. (vidu la figuron). O estu la tera centro.
Tiam la triangulo OAS estas, orta ĉar la rekto SA tuŝas la teran surfacon. Tio estas

$OA^2 = OS^2 + AS^2$

Sed

$OS = 40\ 000\ 000/ (2\pi)$

Kaj

$OA = OB + 125.7 = OS + 125.7 = 40\ 000\ 000/ (2\pi) + 125.7$

$AS^2 = OA^2 - OS^2 = (40\ 000\ 000/ (2\pi) + 125.7)^2 - OS^2$
$= (40\ 000\ 000/ (2\pi))^2 + 2*40\ 000\ 000/(2\pi)*125.7+125.7^2 - (40\ 000\ 000/ (2\pi))2$
$= 2*40\ 000\ 000/(2\pi)*125.7 +125.7^2$
$= 1601289685.84...m^2$ de kie mem
= proksimume 40016 m aŭ 40 km

Alia versio

- ***La horizonto***

Kiom fore estas la horizonta linio se ni troviĝas sur loko je alteco 10 m?

La turo de Pisa

Respondo:

Prikonsiderante la Teron kiel sferon kaj ties sekcion same rondan, ni notu la radion per OA kaj AS la altecon de la loko, dum per SB la segmenton ĝis la horizonta linio. Kompreneble OB estas vertikala al AB.
En la orta triangulo ni apliku la Pitagoran teoremon.
R= 40 000 000 m / 6.28.
Ni supozu x = AB
Tiam ni solvu la ekvacion

$$(40000000/(2*3.14) +10)^2 = (40000000/(2*3.14))^2 + x^2$$


La statuo de libereco

De kie

x^2 = 2*10 * 40 000 000/(2*3.14) +100
x^2 = 400 000 000/ 3.14 + 100
x = 11 287 m

Noto: Tutsimile oni povas difini ankaŭ la radion de la tero mem.

- **La plej malmulte kosta vojaĝo**

Iu avara komercisto ĉiam transportis siajn varojn per la veturiloj de la aliaj komercistoj, ĉar li ne volis elspezi mem.

Sed, iufoje, neniu ofertis al li helpon, tial li mendis ŝarĝaŭton.
Tri aŭtistoj postulis respektive: 250 L, 200 L kaj 150 L por 25 km.
Tio ne konvenis al la avarulo. Alia aŭtisto proponis originalan pagmanieron: unu centonon por la unua kilometro, du centonojn por la dua kilometro, kvar centonojn por la tria kaj tiel plu, ĉiam duobligante la pagon po kilometro.
La aŭtisto pravigis tion, dirante ke la vojo fariĝas ĉiam pli montara. La komercisto akceptis plezure.
Kiel pensas vi, ĉu li pagos malpli?

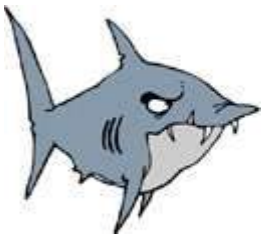
 

Solvo

Se ni adicius la nombrojn 1+2+4+8+16+32+64+....+ 2^{23} +2^{24} , esprimantaj la pagojn por 25 sinsekvaj kilometroj, rezultiĝus la sumo 33 554 431 centonoj aŭ 335 544 L

- **La ŝarkoj**

La mara vulpo longas kvinoble ol la mara hundo, kiu, siaflanke, estas duoble pli kurta ol la mara anĝelo kaj duoble pli longa ol la dorna ŝarko.
Difinu la longecon de ĉiu unuopa ŝarko se sciite ke la dorna ŝarko longas 1.5 m

Solvo

Ni povas solvi la problemon notinte la ŝarko-longecojn per segmentoj sur rekto

La mara vulpo: /______/______/______/______/______/

La mara hundo /__/__/

La mara angelo: /__/__/__/__/

La dorna ŝarko: /___/

El la figuro, evidentiĝas ke la eta segmento estas 1.5 m

Tiam
la dorna ŝarko longas 1.5m
La mara anĝelo longas 6m.
La mara hundo longas 3m.
La mara vulpo longas 15m

- **La kapriciema horloĝo**

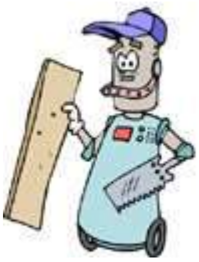
  Mia horloĝo reagas al la temperaturŝanĝo:
  dumtage ĝi antaŭeniras ½ minutoj,
  dum nokte ĝi postrestas 1/3 minutoj.
  Se je la unuan de aprilo ĝi indikis la precizan horon, ĉu vi povas diveni kiutage ĝi antaŭeniros 5 minutojn?

Respondo:

La diferenco dum 24 horoj estas ½ - 1/3 = 1/6 min.
Ni dividu 5 per 1/6 kaj rezultiĝas 30 tagojn.
Do, je la unuan de majo la horo antaŭeniros 5 minutojn.

- **La pagiĝo de la segisto**

  Iu segisteja proprietulo pagis la segistojn je unu eŭro por ĉiu sego de la dika arbotrunko. Se la trunko longas 12 m kaj la proprietulo demandas ke oni segu ĝin je pecoj po duonmetron, kiom da eŭroj devas enspezi la segistoj?



Solvo

Noto: Ne hastu diri 12 x 2 = 24 euroj, ĉar seginte la 23-an pecon oni ne plu bezonas segi la trunkofinon. Do, la pago estas 23 eŭroj.

La fosisto

Iu fosisto fosas dum ok horoj kavaĵon je baza surfaco unu kvadrata metro kaj profundeco 4 metroj. Dum kiom da horoj, ok fosistoj elfosos ĝin?

Respondo

Noto: Ne hastu diri ke tio estiĝas ene de unu horo, ĉar ok fosistoj apenaŭ povas labori samtempe en la saman kavaĵon

La trajno

El la vagonara fenestro mi vidis ok vagonojn antaŭe kaj kvin malantaŭe. Kiom da vagonoj enhavas la vagonaro entute?

Respondo

14 vagonoj

- **La ĉinaj kestetoj**

Kesteto enhavas ene de si kvar pli malgrandajn kestetojn, kiuj siaflanke enhavas po tri ankoraŭ malpli grandajn kestetojn. Ĉi lastaj, enhavas po 2 ankoraŭ pli malgrandajn kestetojn.
Trovu la entutan nombron de la kestetoj.

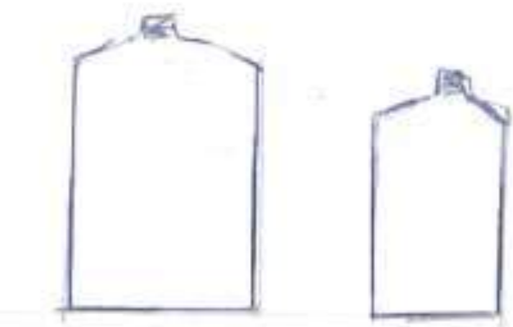
Solvo

1+4 +4 x 3 + 4 x 3 x 2= 5 + 12 + 24 = 41 kestetoj

- **Ladaj boteloj**

Du ladaj boteloj povas enteni kune 38 litrojn da akvo. Malpleniginte trifoje la akvon el la malpligranda lada botelo en la grandan, bezonatas ankoraŭ du litroj ke ĝi ĝispleniĝu. Kiom da litroj entenas ĉiu lada botelo?

Solvo
x litroj entenas la unua lada botelo, y litroj la dua.



Tiam
3y +2 = x.

Aliflanke

x+y =38.

Solvinte ĉi sistemon ni akiras

y + 3y +2 = 38

De kie

4y = 36 kaj y = 9

Dum

x = 3*9 +2 = 29 litroj.

- **Goloj**

Dum iu futbalmatĉo, la venkinta teamo notis kelkaj golojn. Se averaĝe ĉiu golulo notus unu golon, rezultiĝus 3 malpli ol la nombro de la notitaj goloj, sed se ni konsiderus po 2 goloj por ĉiu golulo rezultiĝus 2 goloj pli.
Kiom da goloj kaj kiom da goluloj estas ĉe la venkinta teamo?

Solvo

n la nombro de la goloj kaj **m** la nombro de la goluloj
Tiam

m +3 = n kaj 2m = n + 2

De kie

m -3 = 2 kaj m = 5.

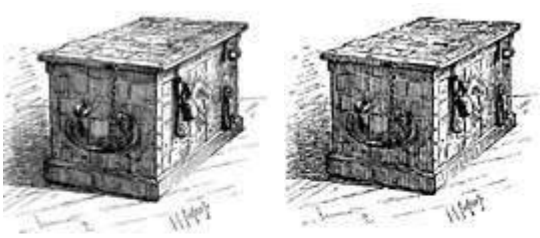
De tio

n = 5 +3 = 8

Do, estis kvin goluloj notintaj 8 golojn.

- **Kiu kesto pesas pli**

Estas du samgrandaj kubformaj kestoj, plenigitaj per sferoj. En la unua kesto enteniĝas 27 grandaj sferoj tutegalaj inter si. En la dua kesto enteniĝas 64 malgrandaj sferoj, same tutegalaj inter si. La sferoj konsistas el la sama materialo. Se la sferoj plenigas la kestojn komplete tiamaniere ke ĉiu tavolo entenas saman nombron de sferoj kaj la sferoj tuŝas unu la alian kaj la kestorandojn, diru kiu el du kestoj pesas pli.



Respondo

Ĉar la kestoj havas kubformon iliaj eĝoj proporcias samkiel la kubaj radikoj de 64 kaj 27, t.e. kiel 4 : 3. Tia estas ankaŭ la rilatumo de la sferaj radioj. Do, unu kesto enhavas kvar tavolojn kaj la alia tri tavolojn kun sferoj. La pli grandaj sferoj havas volumenon, respektive mason je 64/27 foje pli granda sed ankaŭ la nombro de la malgrandaj sferoj estas je 64/27 pli granda. Tial rezultiĝas ke la masoj de ambaŭ kestoj estas samaj.

- **La volumeno de la botelo**

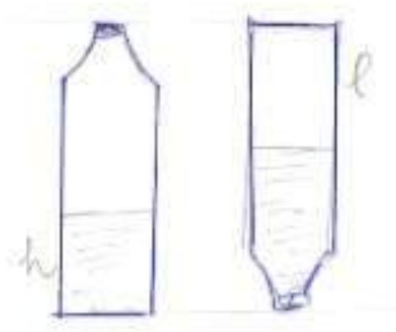
Ĉu vi povas difini la volumenon de la botelo entenanta iom da likvaĵo en si, kun bazo ebenforma (ne gravas ĉu ronda, ĉu rektangula aŭ kvadrata), per helpo de simpla rektilo? Oni ne permesas enverŝon aŭ elverŝon de la likvaĵo.

Respondo

Ni mezuru la altecon de la likvaĵo en botelo, ni supozu ke ĝi estas h. Ni supozu plue ke la surfaco de la botela fundo estas S. Tiam la volumeno de la likvaĵo estas hS. Poste ni renversu la botelon. Nun la likvaĵo havas alian altecon, sed ni supozu ke la distanco de la nova nivelo de likvaĵo ĝis la fundo estas l. (vidu la figuron). La volumeno de la malplena parto de la botelo estas lS. Tiam la volumeno de la tuta botelo estas

Sh + Sl = S(h+l).

S kalkuleblas ĉar la fundo de la botelo estas konata figuro (cirklo, kvadrato aŭ rektangulo) kaj la rektilo helpas tiucele.



- **La biciklisto**

Kiam la biciklisto trairis 2/3 de la vojo, la biciklon trafis difekto. En la restinta vojparto kiun li estis devigita trairi surpiede, la biciklisto perdis duoble pli da tempo ol tiu pasigita surbicikle.
Kiomfoje pli rapide veturis la biciklisto ol li paŝis.

Respondo

La biciklisto trairis surpiede 1/3 de la vojo, sed elspezis duoble pli da tempo. Dume tiu ĉi vojo estas duoble malpli longa ol tiu trairita per biciklo. Sekve per biciklo li veturis 2 x 2 = 4 foje pli rapide ol surpiede

- **La kurejo**

Laŭlonge de la kurejo estas lokitaj 12 flagetoj je sama distanco unu disde la alia. La starto komenciĝas de la unua flageto. Ok sekundoj poste li atingas la okan *flageton. Post kiom da sekundoj li atingos la dekduan flageton? Ni supozu ke la rapideco de la kuranto estas la sama.*

Respondo

De la unua flageto ĝis la oka estas 7 intervaloj egaldistancaj. (ne ok!). De la unua ĝis la dekdua flageto estas 11 intervaloj. La kuranto trapasas ĉiun intervalon dum 8/7 sekundoj, tiam 11 intervalojn li trapasos dum 11 x 8/7 = 88/7 sekundoj aŭ proksimume 12.5 sekundoj.

- **La birdoj**

Se sur ĉiu arbobranĉo staros po unu birdo, tiam plurestos unu birdo en aero. Se sur ĉiu arbobranĉo staras po du birdoj, tiam unu branĉo restos neokupita. Kiom da birdoj estas entute?

Respondo

x branĉoj kaj y birdoj

Do

x+1 = y

Sed

2(x - 1) = y

De kie rezultiĝas

x+1= 2 x – 2

aŭ

x = 3 kaj y =4

- **Banknotoj**

Iu objekto kostas 190 L. Kiam la aĉetanto disponas nur pri banknotoj el 3L dum la vendisto disponas banknotojn el 5L, ĉu eblas ke li pagu per tiaj bankonotoj kaj ricevu enorde la reston. Kiom da banknotoj interŝanĝos ĉiu el ili?

***Respondo**:*

La aĉetanto donos 65 banknotojn el 3L aŭ 195 L kaj la vendisto redonos banknoton el 5L ĉar la objekto kostas 190 L.

- **Termometro**

Difektita termometro indikas la temperaturon +1^{o}C en la glaciiĝinta akvo kaj +105^{o} C en la bolanta akvo. Nun ĉi termometro indikas + 17^{o} C.
Kioma estas la ĝusta temperaturo?

Solvo

Laŭ kondiĉoj, plenumendas la propocio

(105-1) /100 = (17 -1) /x

Kie x indikas la veran temperaturon.

Tio donas

x = 16 *100 /104 = proksimume 15.38^{o}C

- **Melono**

Mi volis aĉeti melonon je 3 kg, sed plaĉis al mi alia melono je maso 5 kg. je prezo 5L/kg plie. Tial mi pagis 45L plie. Kiom kostis la dua melono?

Solvo

x L/kg kostas la melono aĉetita de mi; (x-5) L/kg kostas la unua melono je maso 3 kg.
Ni formu la ekvacion

5x = 3(x-5) +45

donanta

5x = 3x -15 +45

aŭ

2x = 30 kaj x= 15 L/kg.

La dua melono kostis 5*15= 75 L

- **Du pes-ŝtonoj**

Mi disponas pri pesilo kaj du pes-ŝtonoj, respektive 50 g kaj 200 g. Mi volas dividi 2 kg el 9 kg da riso. Kiamaniere agu mi?

Solvo

Ni povas agi tiel. Ni dividu la kvanton el 9 kg en du egalmasojn sur ambaŭ pesilplatojn. Poste ni agu similmaniere kun unu el tiu dividitaj masoj el 4.5 kg. Fine ni surmetu la pes-ŝtonojn sur unua plato dum sur la alia enverŝu rison sampese. Tiel restas ĝuste 2 kg.

- **Bicklistoj**

Grupo de biciklistoj decidis trejniĝi antaŭ la konkuro sur kurta itinero. Ĉiuj pedalis je rapideco 35 km/h. Iumomente, unu el la biciklistoj sin disigis de la grupo pedalante je 45 km/h kaj trairis 10 km. Poste li turniĝis malantaŭen ne malpliigante la rapidecon kaj reunuiĝis kun la grupo daŭriganta la bicikladon je la antaŭa rapideco. Kiom da tempo estas pasinta ekde la momento kiam la biciklisto sin disigis de la grupo ĝis la momento kim li denove reunuiĝis kun ĝi.

Solvo

Ni notu per x la tempodaŭron ekde la momento de la disiĝo ĝis la momento de reunuiĝo kun la grupo.
Dum tiu tempo la biciklisto estas trairinta 45x km kaj la grupo 35x km.
La sumo de ĉi tiuj distancoj konsistas el 10 km trairitaj de la disigita biciklisto dum la reveno, plus la distanco trairita de la grupo dumtempe, do egala al la duoblo de la distanco trairita de la biciklisto antaŭ la reveno. Tial ni povas formi la ekvacion

$45x + 35x = 2*10 = 20$

t.e.

$80x = 20$

aŭ

x= 0.25 horon aŭ kvaronhoron.

Ludoj

- **6 glasetoj**

Ni havas 6 glasetoj tutsimilaj envicigitaj, kie la unuaj tri estas malplenaj, la duaj tri plene de akvo. Prenante per mano nur unu glaseton kaj tuŝante nur unu glaseton envicigu la glasetojn tiel ke unu estu plena, la alia malplena, unu plena la alia malplena, ktp.

Solvo

Sufiĉas preni la antaŭlastan glaseton kaj malplenigi ĝin enverŝante la ties akvon en la duan glaseton.

- **Glasoj**

"Kvadrato 4x4 entenas 16 malgrandajn kvadratojn kie estas lokitaj po unu glaso. Demetu kvar glasojn tiamaniere ke en ĉiu vico kaj ĉiu kolono restu para nombro da glasoj."

0	*0*	*0*	*0*
0	*0*	*0*	*0*
0	*0*	*0*	*0*
0	*0*	*0*	*0*

Solvo

Unu maniero estus la jena:

0	0	0	0
	0		0
0	0	0	0
	0		0

- **Foteloj**

"Ĉe la kvar muroj de kvadrata ĉambro surmetu 10 fotelojn tiel ke sur ĉiu muro estu po tri foteloj"

Solvo

	0	0	0	
0				
				0
0				0
0			0	0

Sudoko

Estas ludo tre disvastigata lastaj jarojn, devene de Japanio. La ĵurnaloj dediĉas al ĝi apartajn longajn paĝojn por altiri pli da legantoj.
Temas pri tabelo 9x9 kie lokiĝas la ciferoj 1-9, unufoje sur ĉiu vico, unufoje sur ĉiu kolono, unufoje sur ĉiu subkvadrato 3x3 el naŭ entute en kiujn dividiĝas la kvadrato 9x9. Vidu:

6	**8**	**3**	1	7	4	**9**	**2**	**5**
9	**5**	**4**	2	3	6	**7**	**8**	**1**
2	**1**	**7**	5	9	8	**3**	**4**	**6**
3	7	8	**6**	**5**	**9**	4	1	2
4	6	2	**8**	**1**	**3**	5	9	7
5	9	1	**7**	**4**	**2**	6	3	8
8	**4**	**5**	3	2	7	**1**	**6**	**9**
7	**3**	**6**	9	8	1	**2**	**5**	**4**
1	**2**	**9**	4	6	5	**8**	**7**	**3**

Ekzerco

La kvadrato kun nombroj

	1		**7**					
	5							**4**
				1	**4**	**9**	**6**	
		9	**3**	**4**	**7**		**8**	
		8				**2**		
7			**5**				**9**	
3	**2**		**6**					
6					**3**	**7**	**2**	
				8	**2**		**5**	**6**

Kompletigu en ĉi tiu tabelo la malplenajn kvadratetojn per nombroj de 1 ĝis 9 tiel ke ĉiu vico kaj ĉiu kolono havu ĉiujn nombrojn de 1-9, samtiel ĉiu kvadrato je 3x3 (vidu naŭ kvadratojn pli malgrandajn) havu ĉiujn nombrojn de 1-9.

- **Triangulo**

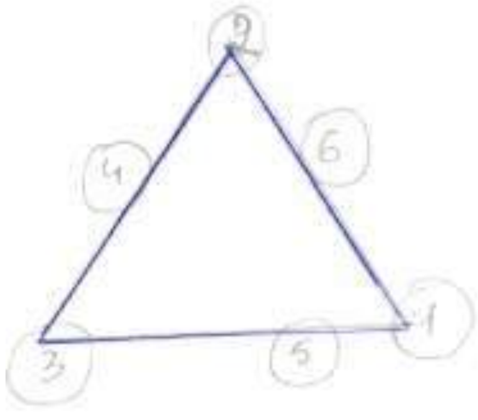
Surmetu sur la eĝojn de iu triangulo la nombrojn de 1-6 tiel ke ties sumo en ĉiu eĝo estu egala.

Solvo

Unu versio estus la jena:

2 6 1 5 3 4

Ĉi kaze ni havas 2+6+1= 1+5+3 = 3+4+2=9



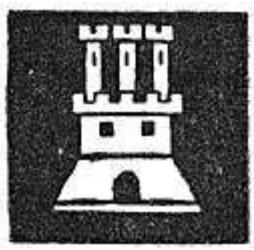
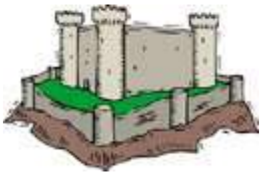
- **La soldatoj de la defendoturo**

Defendoturo je formo regula sesangula estas gardata de certa nombro de soldatoj, entute 48, kiujn ilia komandanto estas lokiginta po 16 en ĉiu flanko.

Pli ĝuste li lokigis ilin kiel jene:
po kvar en ĉiu kulmino kaj po ok en ĉiu interkulmina spaco, do entute

*4*4+4*8= 48.*

Sed, dum la batalo, mortiĝas kvar soldatoj.
La komandanto ne volis evidentigi tion al la malamiko, tial li decidis reenvicigi siajn soldatojn tiamaniere ke en ĉiu flanko la malamiko vidu denove po 16 soldatoj.
Ĉu vi povas diveni lian enviciĝon novan?

Solvo

La antaŭa pozicio (po 4 en ĉiu kulmino aŭ angulo kaj po 8 inter la anguloj) donis
4*4 +4*8 = 48

Nun estas kvar soldatoj malpli, t.e. 44 entute.
Ili povas enviciĝi po 5 en ĉiu angulo kaj po 6 inter la anguloj, (5 + 5 + 6 = 16), kaj

4*5 +4*6 = 44

Kaj se mortiĝus pliaj kvar soldatoj, kiamaniere vi envicigus la restintaj 40 soldatojn por ke la malamiko denove vidu en ĉiu flanko po 16 soldatoj?

Respondo:

po 6 soldatoj en la anguloj kaj po 4 inter la anguloj

- **La rano**

F																							

Ludas du personoj

"Unu el du personoj komencas la ludon laŭŝance. Li rajtas moviĝi de la dekstro al la maldekstro je 1-3 kvadratetojn. Poste li lasas la vicon al la partnero.
Kiu do atingas la unua al la maldekstra rando, li venkas."

- **La ĉokolado**

"Granda ĉokolado je kelkaj vicoj kaj kelkaj kolonoj konsistas el multaj kvadratetoj. Sur unu el ili estas falinta muŝo.
Ludas du personoj. Komencas unu el ili. Li rajtas deŝiri la ĉokoladon laŭ ĝiaj horizontalaj kaj vertikalaj linioj prenante kiom ajn da vicoj aŭ kolonoj laŭeble. Perdas la ludon tiu kiu estas devigita preni ankaŭ la kvadrateton kie enfalis la muŝo"

		•				

- **Kiu atingas la unua 100**

Ludas du personoj

"Komencas la ludon unu el ili, laŭŝance. Li rajtas noti nombron de 1-10. Poste al tiu nombro la dua partnero aldonas alian nombron de 1-10. Denove la unua aldonas al la nova nombro 1-10. Kaj tiel plu.
Venkas tiu kiu atingas la unua 100.
(Oni povas komenci ankaŭ de 100 kaj substrahu de 1-10 ĝis oni atingu la nulon)."

- **Labirinto**

3	2	7	9	5	
1	4	3	1	9	
1	7	2	6	8	
9	5	3	2	1	
←1	5	7	4	3	←

“Sekvu vojon komencante de la dekstra sageto ĝis al la maldekstra sageto, tiel ke vi trapasu ĉiujn nombrojn nur unufoje, je sumo 45!”

- **Ludo kun la 15**

“Kvadrato 4x4 enhavas nombrojn de 1-15 kiel en la figuro, kie nur du nombroj estas ŝanĝintaj siajn poziciojn, laŭvice. Vi devas manovriĝi movante la nombrojn sur la kvadratetojn, tiel ke ili enviciĝu laŭorde.”

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	**15**	**14**	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	**14**	**15**	

Noto:

Ĉi tie aplikeblas la tiel nomata teorio de “malregulecoj”, kie “malreguleco” okazas kiam unu nombro pozicias antaŭ alia pli malgranda nombro laŭvice, ekz. 15 antaŭ 14. Se 15 troviĝas antaŭ 14, 7, 3, 9 ni havas kvar “malregulecoj”.
Laŭ la teorio, se la nombro de malregulecoj estas para, la problemo estas solvebla, se tio estas nepara, la problemo estas malsolvebla. En nia kazo, estas nur unu malreguleco (vidu), tial la problemo ne havas solvon!

- **Ludoj per alumetoj**

Estas ja tre popularaj ludoj, kiujn ofte mem la lernantoj proponas. Ili uzas ekz. la fakton ke la dua radiko de 1 estas 1, same aliajn aritmetikajn ecojn.
Ekz.

VI – IV = VI estas sendube malvera egalaĵo

Se ni prenu unu alumeton ĉe la substrahanto, lasante ĝin je formo V kaj surmetante tiun alumeton supre la V de la diferenco, rezultiĝos V - IV = $\sqrt{1}$ (la dua radiko de 1), do tio estas ĝusta.

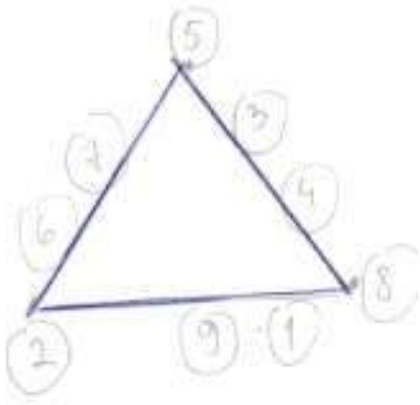
V- IV = $\sqrt{1}$

- **La magia triangulo**

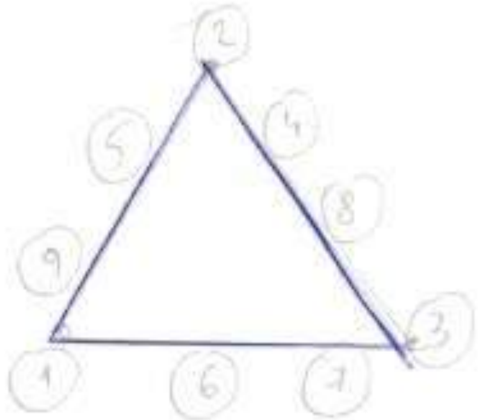
Sur la seĝoj kaj la kulminoj de iu triangulo ni surmetos po kvar etaj cirkloj, entute naŭ. Notu ene de ili la nombrojn 1-9 tiel ke sur ĉiu seĝo la sumo de la nombroj rezultiĝu 20.

Respondo

Ni surmetu laŭvice 5, 3, 4, 8, 1, 9, 2,6, 7



- *Provu la samon tiel ke la sumo rezultiĝu 17.*



Respondo

2; 4; 8; 3; 7; 6; 1; 9; 5

- **Magia kvadrato**

Magiaj kvadratoj estas tiuj dividitaj en malgrandajn kvadratojn per nombroj lokitaj nur unufoje, kies sumo estas la sama laŭ la vicoj, kolonoj aŭ diagonaloj.
Laŭ la matematikaj studoj rezultiĝas ke:

Magiaj kvadratoj 2x2 ne ekzistas.
Magiaj kvadratoj 3x3 estas nur unu (ŝanĝiĝas nur la pozicioj danke al la rotacio aŭ simetrio)
Magiaj kvadratoj 4x4 estas 800
Magiaj kvadratoj 5x5 estas kvarmiliono.

- *Kompletigu per skribitaj nombroj nur unufoje la naŭ kvadratetojn tiel ke jen horizontale, jen vertikale, jen diagonale la sumo rezultiĝu 27.*

Respondo

8	13	6
7	9	11
12	5	10

Se vi kondiĉigas ke la sumo estu 15 ni ekhavus ĉi kvadraton

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Du aliaj magiaj kvadratoj

Kompletigu la kvadratetojn per nombroj 1-16 tiel ke la sumo en ĉiu kolono, en ĉiu vico kaj ĉiu diagonalo rezultiĝu 34.

Respondo

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Kompletigu ĉiun kvadrateton per nombroj 1-25 tiel ke la sumo en ĉiu kolono, en ĉiu vico kaj diagonalo rezultiĝu 65.

Respondo

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
11	18	1	14	22
23	6	19	2	15

- *Trovu la malplenajn lokojn en la subajn kvadratetojn.*

13	24	5	6	12
10		17	23	4
	3	9	15	16
14	20		2	8

15	18		4	7
	2	10	13	16
8	11	19		5
17	25	3	6	
	9			

- **Numera rado**

Cirklo estas dividita en egalajn sektorojn per kvar diagonaloj. Lokigu sur la centron kaj sur la ekstremojn de la diagonaloj la nombrojn 1-9 tiel ke la sumo rezultiĝu 15.

Respondo

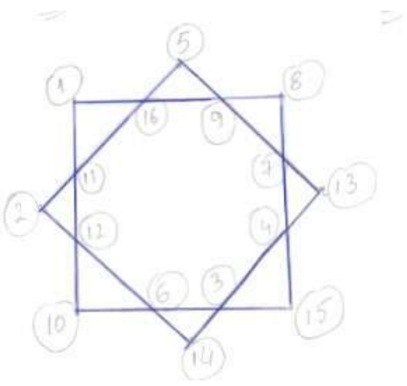
Lokigu sur la centron 5, poste ĉio estas evidenta.

- **La superpoziciitaj kvadratoj**

Du egalaj kvadratoj, superpoziciitaj, tiel ke iliaj intersekcioj kaj kulminoj fariĝu entute 16. Lokigu sur tiujn punktojn la nombrojn 1-16 tiel ke la sumo sur ĉiu seĝo rezultiĝu 34.

Respondo

Sur la kulminoj de la unua kvadrato ni lokigu la nombrojn: 1, 8, 15, 10, dum sur la kulminoj de la dua kvadrato la nombrojn: 5, 13, 14, 2.
Intere, sur la unua kvadrato ni lokigu: 16, 9, 7, 4, 3, 6, 12, 11.



Matematikaj sofismoj

Tiuj baziĝas sur la nekorekta aplikado de la reguloj kaj matematikaj leĝoj por la multipliko kaj divido per nulo, por elradikiĝo de nombro kiam la radiko havas paran indekson, ks.

- **Kie estas la eraro?**

Ni supozu ke a = b # 0

Ni multipliku ambaŭ flankojn per a

$aa = ab$ aŭ $a^2 = ab$

Ni substrahu sur la ambaŭ flankoj b^2

$a^2 - b^2 = ab - b^2$

Ni faktorizu ambaŭ flankojn

$(a - b)(a + b) = b(a - b)$

Ni reduktigu sur ambaŭ flankoj per (a-b)

$a + b = b$

Sed $a = b$, tial ni havas

$b + b = b$

aŭ

$2b = b$

Ni reduktigu per b

$2 = 1$!!??

Kiel tio eblas, kie ne eraris?

Respondo

Ĉar $a = b$, rezultiĝas $a - b = 0$.

Sed ni estas reduktintaj per (a-b), do per 0, kio malpermeseblas!

- **Estas sciite ke:**

  $\mathbf{0 \times 7 = 0 \times 8}$

Ni dividu per 0

Rezultiĝas 7=8!!!

- Ni ekiru de la vera egalaĵo

  $\mathbf{(-a)^2 = (+a)^2}$

Ni trovu la duan radikon

Rezultiĝas (–a) = (+a)!!!

- Se

$x + y = 1$
$x + y = 2$

rezultiĝas 1 = 2 !!!

- **Se a > b**

$a b > b^2$

$ab - a^2 > b^2 - a^2$

$a (b-a) > (b-a)(b+a)$

Ni dividu per (b – a)

Rezultiĝas $a > b+a$

Ni adiciu $a > b$ kun $a > b+a$ Tiam rezultiĝas

$2a > 2b + a$

De kie $a > 2b$.

Do, se $a > b$, rezultiĝas $a > 2b$!!!

- **La aĝo de la kapitano**

Iu kapitano diris al sia filo:
"la trioblo de la kvadrato de cia aĝo plus 26 egalas al la kvadrato de mia aĝo. Kiom jara estas mi?"

Solvo

La problemo estas malsolvebla.
Envere, se ni notas per a la aĝon de la kapitano kaj per b tiun de lia filo ni ricevos

$a^2 = 3 b^2 +26$

Do, a^2 havas formon je 3n+2, ĉar $3b^2 +26 = 3b^2 +24 +2 = 3(b^2+8) +2 = 3n+2$

Sed la kvadrato de entjero dividite per 3 ne povas rezultigi, kiel reston, 2. Ĝi postlasas reston 0 aŭ 1. **(**a*a : 3; a povas rezultigi kiel reston 0, 1, 2; 0+0=0; 1+1=2; 2+2=4; 4 :3 =1(1),)

Demandoj postulantaj spritecon

- **La portreto**

La persono sur la portreto estas ja mia patro, sed mi ne estas lia filo. Kiu estas mi?

Respondo:

Mi estas lia filino

- **La muro**

"Laŭlonge de la ekvatoro je 40 070 km oni konstruis muron je 3 metroj dika kaj 8 metroj alta. La uzita ŝtono por ties konstruiĝo havas specifan pezon 2.2 oble ol tiu de la akvo. Kioma estus la plialtiĝo de la Tera pezo pro tiu muro?"

La ĉina granda muro, eble la sola objekto konstruita de homoj videbla de satelito

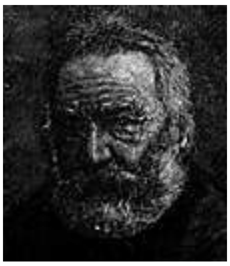
Respondo

La Tera pezo ne plialtiĝos, ĉar la materialo de la muro estas ĉerpita de la Tero mem.

La Veto

"Du kamelrajdistoj staras en la dezerto ĉe siaj kameloj post kiam ili vetis inter si: ili devas konkuri rajdante sur la kameloj ĝis iu puto fore en la dezerto. Sed venkos tiu kiu atingas la puton la dua.
Tial, ili ne povas ekrajdi ĉar ĉiu el ili emas postresti la alian. Fine, ili rezignas de la konkuro.

Iu derviŝo[5]*, sciiĝinte pri la kazo, donis saĝan konsilon al ili, post kio ambaŭ viroj tuj ekkonkuris impete.*
Ĉu vi povas diveni kian konsilon donis la derviŝo al la kamelrajdistoj?"



[5] Derviŝo - islama monaho

Respondo
La derviŝo konsilis al ili tuj ŝanĝi siajn kamelojn.

- **Profesoro**

"Iu profesoro estas revenante sian hejmen. Komencis pluvi. La profesoro mendis taksion kaj enhejmeniĝis. Sed li konstatis ke li estis perdinta sian tekon en la taksion. Li tuj reiris en la taksiejon kaj petis la ŝoforojn, kiuj neis havi lian tekon en iliaj taksioj. La profesoro, pripensiiĝinte, sukcesis trovi la ĝustan taksion kaj petis eĉ helpon de la polico. Kiel li divenis tion?"

Respondo

La Tero sub la taksio ne moviĝinta estis ankoraŭ seka.

- **La pilko**

"Infanoj ludas per malgranda kaŭĉuka pilko en la korto, pavimita per betono. Tiu lasta, ruliĝanta, enfalis en profundan trueton. La infanoj apenaŭ povis eligi la pilkon el la trueto. Sed fine unu el ili, kiu ŝatis fizikon, sukcesis fari tion. Kiel agis li?

Respondo

Tiu infano enverŝis akvon en la trueton kaj la kaŭĉuka pilko aperis mem sur la surfaco.

- **La novedzo**

"La novedzo de profesoro Mirus skribis al sia fianĉino: Dum mia boato rapida pluskis senbrue en la serena akvo je direkto de okcidento, la maleviĝinta suno, kiun mi rigardis subite vekis sopiron pri vi.
Per kio moviĝis la boato: per motoro, per velo, per remiloj aŭ per pedalado?"

Respondo

Ĉar la boato pluskis senbrue, ĝi ne havis motoron. Ĉar ĝi estis pluskante rapide, kaj la akvo estis serena, sekve ne estis ventoblovo, la boato ne povus havi velojn. La novedzo iris okcidenten, sekve li estis pedalante ĉar la remila boato postulas ke la dorso de la boatisto estu kontraŭ la direkto de la moviĝo.

- **La heredaĵo**

"Iu advokato ricevis leteron de sia kliento, kie ĉi lasta diris: ĉar lia patrino estas la bopatrino de mia patrino kaj lia filo estas la kuzo de mia frato...
La advokato envane klopodis diveni la parencajn rilatojn de ĉi tiu "li" al sia kliento. Kaj vi, kara leganto?"

Respondo

(Li) estas la onklo

- **La patro**

"Du amikoj vizitas muzeon. Ili vidas sur la muro la portreton de juna viro kaj unu el ili diris: La patro de la persono sur la portreto estas la sola filo de la parolanto. Kia estas la parenceco de la parolanto kaj la persono sur la portreto?"

Rezonado

Ĉar la sola filo de sia patro povas esti nur la parolanto, la viro sur la portreto estas la nepo.

Geedzoj

- *Saluton geedzoj-alparolis iu al viro kaj virino laborantaj sur agrokampo.*
- *Ni ne estas geedzoj!*
- *Kiaj ja estas do vi?*
- *La patrino de ĉi tiu bravulino estas la bofilino de mia patrino*

Ĉu vi povas diveni la parencecajn rilatojn de tiuj uloj?

Respondo

Onklo kaj nepino

- **La proceso**

"Dum iu proceso, fraŭlino Eva deklaras ke ŝi havas du fratojn, sinjorojn Davis kaj Neman, kiuj tamen apenaŭ havas ian sangan parencecon inter si. La juĝistoj ne volis kredi tiun fakton. Kaj vi?

Respondo

La sangaj parencecoj klariĝas per la jena grafiko:

Eksaj geedzoj Dua geedziĝo

Dua edzino + s-ro Davis la patro + unua edzino + s-ro Neman la patro

S-ro Davis la filo fraŭlino Eva S-ro Neman la filo

- **Tri amikinoj**

Tri amikinoj tagmanĝis en restoracio. La fakturo notis 30 $. Ĉar la kasisto estas erarinta je 5 $ pli, la kelnero redonis al ili po unu dolaro sed tenis por si 2 $. Do ĉiu amikino pagis 10 – 1 = 9 $ kaj la triopo 9x3=27 $. La kelnero ricevis 2 $.
Do, kie estas 1 $?

Respondo

Fakte, nenia problemo ekzistas, la eniroj kaj eliroj de la mono devas esti egalaj. Tiel 30 - 3 = 27 kaj 25 + 2 = 27.
Do elirmono = enirmono.
Tute enorde!

- **Kiom da rektanguloj**

Desegnu kvar horizontalajn paralelajn liniojn kaj kvin vertikalajn kolonojn ilin intersekciantaj.
Ĉu vi povas diri kiom da rektanguletoj formiĝos?
(Atentu, ne hastu respondi?)

Respondo

4*3 +3*3 +2*3 +1*3 +4*2 +3*2 +2*2 +1*2 +1
= 12+9+6+3+8+6+4+2+1= 51

Kontrolu!

- **Hormontriloj**

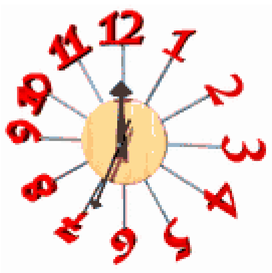
Je la 15 - 00 horo la angulo inter la montriloj estas 90°.
Kioma estos ĝi post 15 minutoj?

Respondo:

La minutmontrilo estas ĉe tri, dum tiu de la horoj estas iomete transpasinta la trion. Kiom da gradusoj?
Ĉar 15 minutoj estas kvaronhoro, tiam la hormontrilo estas transpasinta la trion je ¼ de 30^o aŭ 7.5^o. Definitive la angulo serĉata estos 30 - 7.5 = $22.5^{\mathbf{o}}$

- **Alia**

Nun la horo montras 2-00.
Difinu la angulon inter la montriloj post 20 minutoj.



Solvo

6^o *20 = 120^o
0.5^o *20 = 10^o
120 – (60 + 10) = 50^o

- *Nun estas 2h 12' 30''*

  Kaj post 28 minutoj?

Solvo

Post 28 minutoj estos 2h 40’30’’.
La hormontrilo turniĝos de la originala pozicio je angulo

$30^o *2 + 0.5^o *30 = 80^o$ 15’

Dume, tiu de la minutoj

$6^o * 40 + 0.1^o * 30 = 243^o$

Do

$243 - 80^o$ 15’ = 162^o 45’

- *Nun estas 2-00 horo. Diru la plej proksiman tempon kiam la montriloj de la horoj kaj minutoj koincidos; kiam la angulo inter ili estos orta; kiam ĝi estos 180 gradusoj*

.

Solvo

Je la 2-00 horo, la angulo estas 60^o.

Do, ĉiuminute tiu angulo malpliiĝas je $6^o - 0.5^o = 5.5^o$

La angulo inter la montriloj estos 0^o kiam 60 : 5.5 = 10 10/11’.

Tio okazas je la horo 2^h 10 10/11’ aŭ je 2^h 10’ 55’’

Noto:
Per la metodoj de algebro. la problemo solveblus tiel:

Ni supozu ke la montriloj koincidos post x minutoj.

Post x minutoj, la hormontrilo turniĝos je 0.5x gradusoj.

Tiu de minutoj je 6x gradusoj.

Sciinte ke, je la 2-00 horo, la angulo inter la montriloj estis 60^o,
ni formu la ekvacion

$(0.5x + 60) - 6x = 0$

De kie rezultiĝas

$x = 10\ 10/11$

Provu respondi mem al la du aliaj demandoj

- **Patrino**

La patrino alportis kvanton da pomoj kaj disdonis ĝin egalmaniere al siaj infanoj. Ĉiu infano manĝis po kvar pomoj. Fine restis tiom da pomoj kiom estis ricevinta ĉiu el infanoj.
Ĉu vi povas diveni kiom da pomoj ricevis ĉiu infano?

Respondo

Estas x infanoj ricevintaj po y pomoj, ĉiu el ili. Ili manĝis 4x pomoj kaj restis (xy-4x) aŭ y pomoj.
Do

$Xy - 4x = y$

aŭ

$x(y-4) = y$

de kie

$x=y/(y-4)$

Ĉar x devas esti entjero, tiam y-4 devas esti divizoro de y.

Por k=1 ne estas solvo.
Por k=2 ni havas $y = 2y - 8$

aŭ

$y=8$;

rezultiĝas

$x = 8/4 = 2$

Do, estas du infanoj ricevintaj po 8 pomoj. Ili manĝis po kvar pomoj, restis 8 pomoj. Plenumiĝas la kondiĉo de la problemo.

Por k=3 ni havas $y=3y - 12$ aŭ $y = 6$ kaj $x = 6/2 = 3$

Ni havas 3 infanojn ricevintaj po 6 pomoj. Ili manĝis po kvar pomoj kaj restis 6 pomoj.

Por k=4 ni havas $y= 4(y - 4)$ aŭ $3y = 16$, tio ne akcepteblas ĉar rezultiĝas ne natura nombro.

Por k = 5 ni havas $y = 5(y - 4)$ aŭ $4y = 20$, sekve $y= 5$ kaj infanoj

$X = 5/1 = 5$

Akcepteblas. Do, estas 5 infanoj ricevintaj po 5 pomoj.

Por k = 6 ni havas $y = 6(y-4)$ aŭ $5y = 24$, ne akcepteblas.

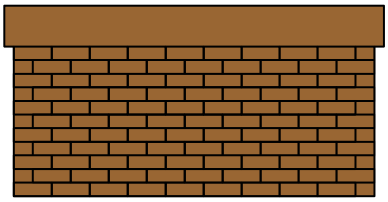
Por k=7 ni havas $y= 7(y - 4)$ aŭ $6y = 28$, ne akcepteblas.

Kaj tiel plu. Estas ja multaj solvoj.

Aliaj rilatiĝoj

- **La briko**

Unu kaj duono briko pesas ¾ de sia peso, plus ¾ kg.
Kiom da kg pesas la briko?



Respondo

x kg pesas la briko
Ni havas la ekvacion

$x = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$

$4x = 3x + 3$

aŭ

$x = 3$ kg

- **La kato**

Unu kaj duonkato manĝas unu kaj duonmuson, dum unu horo.
Kiom da horoj bezonatas al kvin katoj por manĝi 10 musoj?

Respondo

La nombro de la katoj dependas malrekte de la manĝotempo kaj rekte de la nombro de la musoj. La nombro de la musoj dependas rekte de la manĝotempo.

1 ½ 1 ½ 1 ½

5 10 x

La serĉata tempo estas

x =3/2 * 10/(3/2)* 3/2 / 5 = 3 horoj

- **La muŝoj kaj la araneoj**

En iu deponejo estas 100 araneoj kaj tre multe da muŝoj. Dum 20 minutoj, 20 araneoj kaptas 20 muŝojn.
Dum kiom da minutoj 100 araneoj kaptos 100 muŝojn?

Solvo

20 araneoj dum 20 minuoj kaptas 20 muŝojn

1 araneo dum 20 minutoj kaptas 1 muŝon

100 araneoj dum 20 minutoj kaptas 100 muŝojn

Do,

100 araneoj dum 100 minutoj kaptas 500 muŝojn

- **Fiŝoj**

Iu ihtiologo,(fakulo pri fiŝoj) volis kalkuli la nombron de la fiŝoj en iu rezervejo. Tiucele, li kaptis per reto 30 fiŝojn, farbis ilin kaj enlasis denove ilin en la *rezervejon. Post iom da tempo, li kaptis per reto 40 fiŝojn el kiuj nur 2 rezultiĝis farbitaj. Danke al tiuj ĉi donitaĵoj, li sukcesis elkalkuli la nombron serĉatan.*

Kiel do?

Solvo

La farbitaj fiŝoj, denove enlasitaj en la akvon, supozeble estas disvastiĝintaj uniforme. Tial ni povas rezoni:

x	30
40	2

De kie

x = 40*30 /2 = 600 fiŝoj

- **La paŝtistoj**

Unu paŝtisto diras al la alia: donu al mi unu kapridon por ke mi duobligu mian gregon. La alia aldonis: donu vi min unu kapridon, tiam ambaŭ gregoj niaj havos egalan nombron da kapridoj.

Kiom da kapridoj havas ĉiu paŝtiso?

Respondo*:*

7 kaj 5

- **Problemo de Alkuin (735-804)**

Hundo postsekvas leporon, kiu estas 150 m antaŭ ĝi. La hunda salto egalas al 9 m dum la lepora salto nur 7 m.
Post kiom da saltoj la hundo atingas la leporon?
(Supozeble, la tempo por ambaŭ saltoj estas la sama).

Respondo:

La diferenco en metroj por ĉiu salto estas 9 – 2 = 2m. Tiam 150 : 2 = 75 saltoj

- **Trapasu nur unufoje**

Kiamaniere ni povus trapasi nur unufoje de la maldekstra supra rando en ĉiujn punktojn

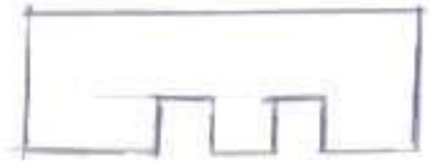
\+   + + + + +

\+   + + + + +

\+   + + + + +

\+ + + + + +

Respondo



Logikaj problemoj

- **La kulpulo**

En iu domo laboris masonisto, farbisto kaj karpentisto. Ili nomiĝis, (ne laŭ supra vicordo):
Luli,
Gimi,
Titi.

Oni konstatis difekton dum la laboro. Dum la enketado:

Titi diris: "Gimi ne kulpas pro tio. Luli estas la kulpulo";

Luli diris: "Ankaŭ mi ne kulpas, Gimi kulpas";

Gimi diris: "Ankaŭ mi ne kulpas, Titi kulpas".

Oni bone sciis ke la farbisto neniam mensogas, la masonisto ĉiam mensogas dum la karpentisto eldiras unu veron kaj unu malveron.

Ĉu vi povas diveni kiu estis ja la kulpulo?

Solvo:

Por trovi la "kulpulon" oni bezonas rezonadi logike. Ni kontrolu laŭvice la respondojn de tri laboristoj serĉante iun malkoincidon en ilia konfesoj.

Ni supozu ke la kulpulo estas Luli.

Tiam:

Titi estas dirinta du veraĵojn (vidu)

Luli, siaflanke, estas dirinta du mensogaĵojn.

Gimi estas dirinta unu veraĵon kaj unu mensogaĵon.

Do, ĉi tie ni konstatas koincidon al la donitaĵoj de la problemo. La kulpulo rezultiĝas la masonisto, kiu nomiĝas Luli.

Provu mem, kiaj estus la respondoj se vi supozas kulpulon Titi-n kaj Gimi-n.

- **Nigra aŭ blanka ĉapelo**

  Tri viroj enviciĝas unu post la alia. Sur ĉies kapo, en mallumo, oni metas po unu ĉapelo, sciiginte ke entute estas tri nigraj kaj du blankaj ĉapeloj. Post enŝaltiĝo oni demandas ĉiujn tri, kian koloron havas la ĉapelo sur la ties kapo. Sekvis iom da silento. Poste, la lasta viro diris: mi ne scias! Tuj post li, respondis simile la dua. Tiam, la unua diris: mi havas nigran ĉapelon.
  Kiel rezonis li?

Solvo

La lasta viro ne povis vidinta antaŭ si du blankajn ĉapelojn, kontraŭe li tuj ekkrius: mi havas nigran ĉapelon!

La dua viro ne povus vidi antaŭ si blankan ĉapelon, kontraŭe ankaŭ li ekkrius ke li havas nigran ĉapelon, ĉar se sia ĉapelo estus blanka, la tria ekkrius tuje favore al la nigra..

Definitive, la unua eltrovis ke li nepre havas nigran ĉapelon.

Alia versio

- *Al tri saĝuloj dumdorme oni havigis po unu ĉapelo, sciinte ke entute estas tri nigraj kaj du blankaj ĉapeloj. Vekiĝinte, ili povus vidi unu la alian starante en cirklo. Sed nur post iom da silento, la plej saĝa el ili divenis ke li havas nigran ĉapelon. Kiel?*
-

- **La forto de la logiko**

Demando **1**:

Du kamenpurigistoj enfalis en la unuan etaĝon, unu pura kaj la alia malpura. Kiu devas lavi sin?

Respondo: Nature, lavos sin la malpuriĝinto

- Ne, vi eraras. La malpuriĝinto vidas la puran laboriston kaj pensas ke ankaŭ li estas ja pura. La alia, vidinte la malpuriĝinton, pensas ke ankaŭ li malpuriĝis, sekve ĝuste li iros lavi sin.

Demando 2**:**

Du kamenpurigistoj enfalis en la unuan etaĝon, unu pura kaj la alia malpura. Kiu devas lavi sin?

Respondo**:** Iros lavi sin la pura laboristo, ĉar li, vidinte la malpuriĝinton, pensas ke ankaŭ li estas malpura.

- Denove vi eraras!

- Kial do?!

- Ĉar la pura laboristo vidas sin per la spegulo ke li estas ja pura kaj ne iras lavi sin. Kontraŭe, la malpuriĝinto vidinte sin per la spegulo, decidas lavi sin tuje..

Demando 3:

Du kamenpurigistoj enfalis en la unuan etaĝon, unu pura kaj la alia malpura. Kiu devas lavi sin?

Respondo:

Ni distingas du kazojn, unue ili ne posedas spegulon, kaj lavas sin la pura laboristo kaj due, ili posedas spegulon kaj lavos sin la malpuriĝinto..

- Ne, ne! Vi ankoraŭ ne divenis!

- Kial do?!

- Ĉar ĉu okazis iamfoje ke du kamenpurigistaj enfalis en la plankon ambaŭ tute puraj?!

Kanibalo aŭ ne

En insulo de kanibaloj, nomata de ni "uotizit" loĝas du gentoj, unu nomata "Trius" kaj la alia nomata "Laja". Laŭ la ekstera aspekto, oni apenaŭ povas distingi la anojn de ambaŭ gentoj. Sed oni bone scias ke Triusoj ne mensogas dum la Lajoj mensogas. Oni renkontis tri insulanojn, kiuj portis, ni supozu, por distingi unu de la alia: la unua kun unu plumo surkape, la dua kun du plumon kaj la tria kun tri plumoj respektive.
Oni demandis la unuan:- Kiom da triusoj estas inter vi?
Ĉar la respondo estiĝis per balbutaĵoj, la dua intervenis dirante:
- *li diras ke estas ununura triuso inter ni.*
  La tria poste aldonis:
  - Ne fidu al la dua, venu kun mi ĉar mi ne kanibalas.

Diru al mi nun, kara leganto, al kiu insulano mi devas fidi?

Solvo

Se la dua diras la veron, (t.e. li estas Triuso), tiam la tria mensogas kaj estas Lajo. Laŭ la dua, la unua estas dirinta ke inter ili estas ununura Triuso. Se tio veras, tiam la unua estas la ununura triuso kaj la dua mensogas. Estas jam kontraŭdiro, la dua jen diris la veron jen mensogis..Tio rezultigas ke la dua mensogas dum la tria ne mensogas. Ni devas akcepti la inviton de la tria.

La envicado

200 soldatoj enviciĝis laŭ 10 vicoj po 20 personoj en ĉiu el ili.
Iu notis la malplej kurtan soldaton en ĉiu vico kaj la alia notis la malplej altan soldaton en ĉiu kolono, respektive per la literoj A_i *kaj* B_j *kie i = 1,2,3.....10 kaj j =1,2,3,.........20.*
Ni notu per la litero A la plej grandan valoron de A_i *– kaj per la litero B la malplej grandan valoron de* B_j *.*
Nun ni demandu: kiu pli grandas A aŭ B?

Respondo:

A < B

Kelkaj fascinaj relacioj

- **Multiplikado de 37 per multobloj de 3**

3	x	37	=	111
6	x	37	=	222
9	x	37	=	333
12	x	37	=	444

15	x	37	=	555
18	x	37	=	666
21	x	37	=	777
24	x	37	=	888
27	x	37	=	999

- **Bela ankaŭ ĉi tio**

111.111.111 x 111.111.111 = 12.345.678.987.654.321

Trapezmaniere:

1	**x**	**9**	**+**	**2**	**=**	**11**
12	**x**	**9**	**+**	**3**	**=**	**111**
123	**x**	**9**	**+**	**4**	**=**	**1111**
1234	**x**	**9**	**+**	**5**	**=**	**11111**
12345	**x**	**9**	**+**	**6**	**=**	**111111**
123456	**x**	**9**	**+**	**7**	**=**	**1111111**
1234567	**x**	**9**	**+**	**8**	**=**	**11111111**
12345678	**x**	**9**	**+**	**9**	**=**	**111111111**

Jen nun alia trapezo

1	**x**	**8**	**+**	**1**	**=**	**9**
12	**x**	**8**	**+**	**2**	**=**	**98**
123	**x**	**8**	**+**	**3**	**=**	**987**
1234	**x**	**8**	**+**	**4**	**=**	**9876**
12345	**x**	**8**	**+**	**5**	**=**	**98765**
123456	**x**	**8**	**+**	**6**	**=**	**987654**
1234567	**x**	**8**	**+**	**7**	**=**	**9876543**
12345678	**x**	**8**	**+**	**8**	**=**	**98765432**
123456789	**x**	**8**	**+**	**9**	**=**	**987654321**

Ankoraŭ unu plu

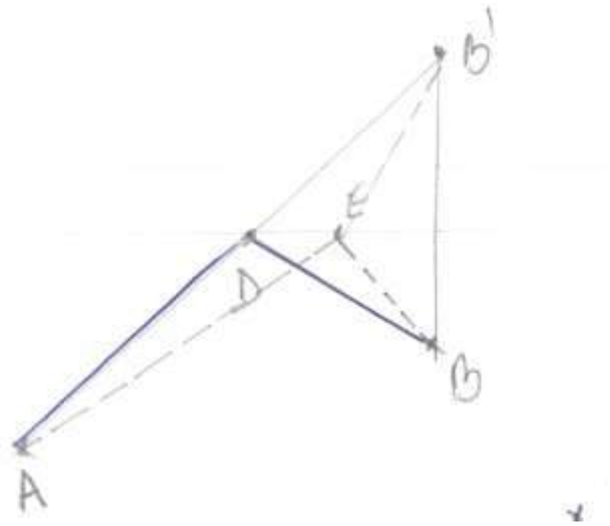
```
                 0   x   9   +   8      =   8
                 9   x   9   +   7      =   88
                98   x   9   +   6      =   888
               987   x   9   +   5      =   8888
              9876   x   9   +   4      =   88888
             98765   x   9   +   3      =   888888
            987654   x   9   +   2      =   8888888
           9876543   x   9   +   1      =   88888888
          98765432   x   9   +   0      =   888888888
         987654321   x   9   -   1      =   8888888888
9876543210 x 9 -  2    = 88888888888
```

Iom da geometrio

- **La akvodeponejo**

Oni devas konstrui akvodeponejon laŭlonge de kanalo por du vilaĝoj etendiĝantaj en la sama flanko de tiu kanalo. Kie do oni devas starigi ĝin tiel ke la sumo de la longoj de la akvotuboj de la deponejo ĝis ambaŭ vilaĝoj estu minimuma?

Solvo



Unue, ni trovu la simetrian punkton de ekz. B rilate al la kanala linio. Poste ni kunigu ties spegulaĵon B’ kun la punkto A. (A kaj B montras la vilaĝojn). La interkruciĝa punkto D kun la kanala linio estas la serĉata punkto kie oni povas starigi la deponejon. Kial do?

Ĉar por ĉiu alia punkto E bezonatus pli longaj akvotuboj. Vidu

EB= EB' kaj DB = DB'

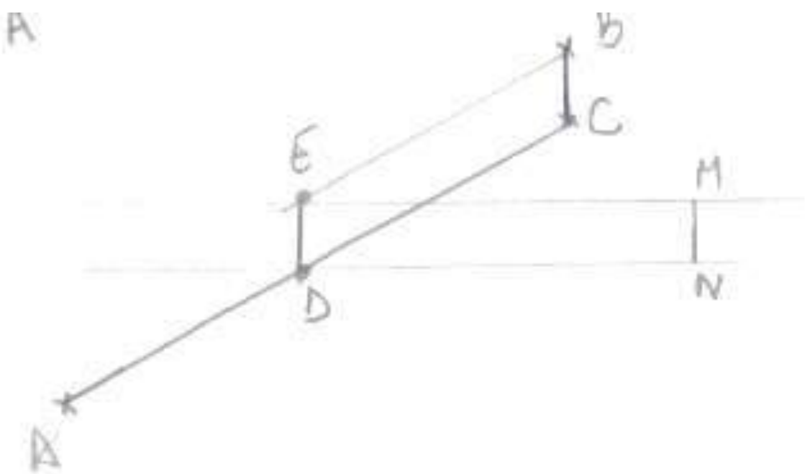
tial AE+EB= AE +EB' > AD+DB' = AD+DB

Romia akvokondukilo

- **La ponto super la kanalo**

Du diversaj loĝlokoj etendiĝas sur ambaŭ flankoj de kanalo je larĝeco d. Oni devas konstrui ponton vertikale al la kanalaj bordoj, servanta al ambaŭ vilaĝoj, tiel ke la sumo de la distancoj de ĝi ĝis ambaŭ vilaĝoj estu minimume. Ĉu vi povas diri kie?

Solvo



Ni streku vertikalon al la kanala linio, tiel ke BC = d.
Poste ni kunigu C kun A.
La punkto D estos unu el la ponto - apogiloj kaj mem DE la tuta ponto.
Kial?
Ĉar la vojo ADEB estas la malplej longa ol kiu ajn alia vojo AFGB kie F ne koincidas al D.

Envere

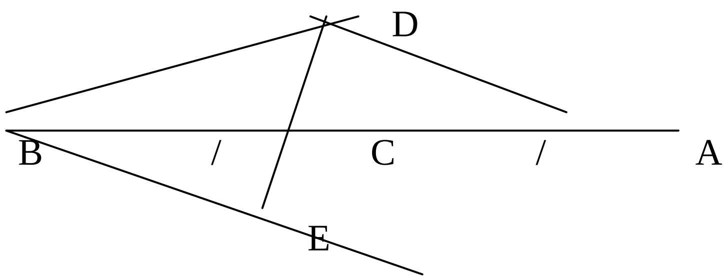
AF + FG + GB = AF + FG + FC > AC + FG > AD + DC + FG = AD + EB + FG = AD + EB + DE = AD + DE + EB

- **La rekto difinanta minimuman surfacon ene de certa angulo**

  Tra certa punkto ene de la angulo desegnu rekton kiu tranĉas minimuman surfacon.
  Kiamaniere ni povas akiri ĝin?

Solvo

Tra la punkto A troviĝanta de B je distanco duonon de tiu de C (vidu la figuron) ni desegnu paralelon al la angula eĝo.
Ĝi tranĉas la alia angulan eĝon en la punkto D tra kiu pasas la serĉata rekto.

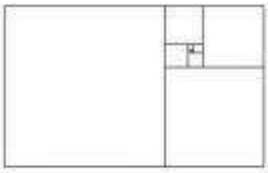


- **La ora rektangulo**

Ora rektangulo nomiĝas tiu rektangulo, kies larĝo kaj longo rilatas laŭ raporto proksima al 0.618. Ĝi nomiĝas ora ĉar ties formo estas tre agrabla por niaj okuloj. La pratempaj grekoj estis konstruintaj la fasadon de Panteono laŭ ĉi tiu raporto.

Ora tranĉo nomiĝas tia tranĉo de la segmento kie la plej granda parto estas geometria mezumo de la malplejgranda kaj la tuta segmento. Ĉu vi povus bazigi tion per kalkulo?

Respondo



a / x = x / (a - x)

Kie **a** estas la tuta segmenta longeco dum **x** ties plej granda parto. Solvinte ĉi tiun ekvacion,

$x^2 + ax – a^2 = 0$

ni trovos

$x = a/2\ (\sqrt{5} - 1)$,

proksimume 0.62.

Panteono

Raporto inter la alteco kaj la larĝeco de Panteono egalas al 0.62.
Same tio okazas ĉe la piramido de Giza kie la raporto inter la alteco de unu flanko al la duono de la baza seĝo egalas al la ora tranĉo.

Piramido de Gizo

Iu edzo en Barato estis mezurinta la altecon de umbiliko de sia bela edzino kaj de la tuta ties staturo kaj konstatis ke ilia raporto egalas al 0.62!

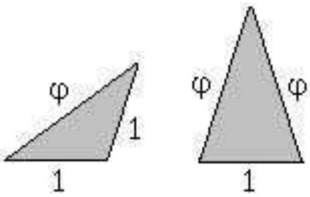
Ekde tiam oni konsideras tiun raporton karakterizaĵo de bela virina staturo...

- **Figuroj kun “oraj trianguloj”**

Usona kolego mia, s-ro Ferroul, alsendis min kelkajn matematikajn ludojn uzantaj ĝuste la oran raporton.

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad (\varphi \approx 1{,}618)$$

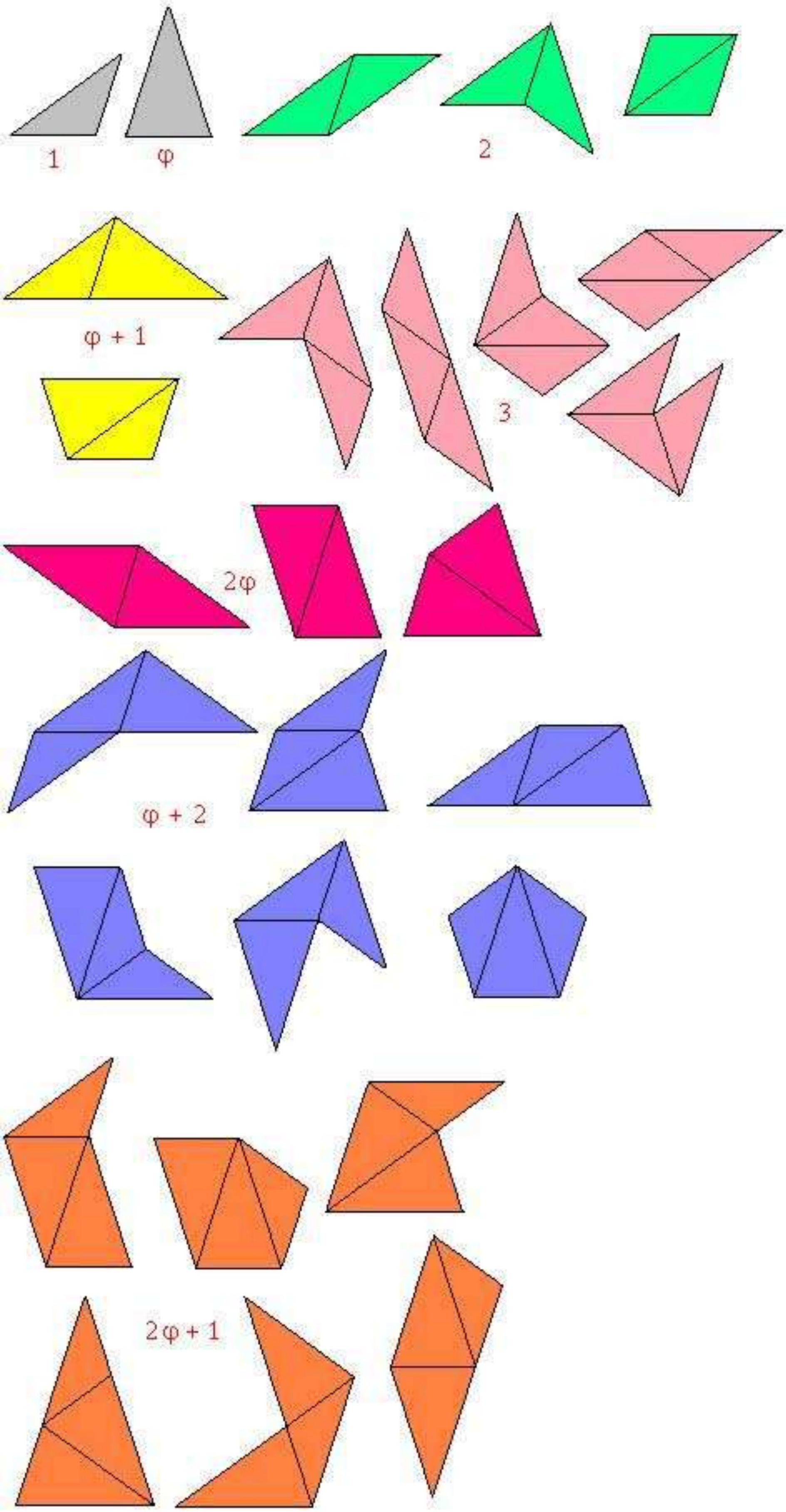
Li estas konstruinta egal-laterajn triangulojn

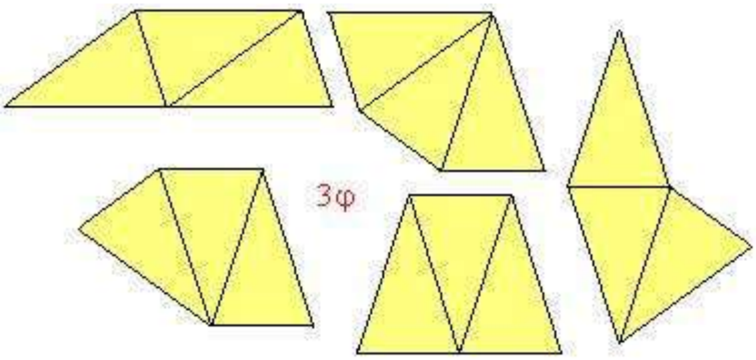


Ĉi tiuj trianguloj nomatas de li “*oraj trianguloj*”.

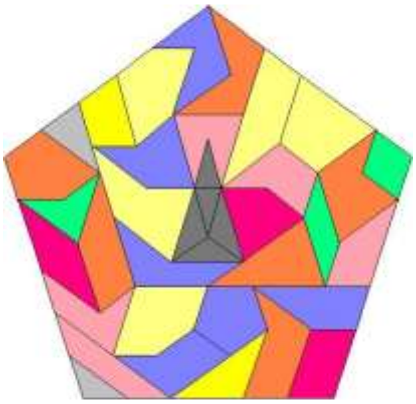
Iliaj anguloj havas respektive masojn je 36°, 36° kaj 108° la unua kaj 72°, 72° kaj 36° la dua.
Rimarkindas ke la surfaco de la unua triangulo egalas al 1, dum tiu de la dua estas φ.
Per tiaspecaj trianguloj s-ro Ferroul formas diversajn “orajn triangulojn” nomataj “*multoraj*”.

Jen ili, ordigitaj laŭ ilia surfaco:


1
φ
2
φ + 1
3
2φ
φ + 2
2φ + 1



Ĉiu 32 multoroj supraj estas ja pecoj de la tiel nomata "Ora Stelo". Ili kovras surfacon je $42\varphi + 42$; kaj aldonante ankoraŭ 5 malgrandajn triangulojn, la surfaco fariĝas $44\varphi + 43$, tio estas la surfaco de la regula kvinangulo, kies eĝo estas $\varphi + 4$.



Bonvolu kontroli ĉi suprajn asertojn, t.e. pruvu ke la surfacoj envorte estas ĝuste tiel, kiel estas dirite.

Standardaj ekzercoj[6]

1. ***Kafkoloraj kaj nigrakoloraj bovinoj***
2.

Kvar nigramakulaj bovinoj kaj tri kafkoloraj donas dum kvin tagoj tiom da lakto kiom ja donas tri nigraj kaj kvin kafaj dum kvar tagoj. Kiu speco de bovino donas pli da lakto: ĉu nigra aŭ ĉu kafa?

[6] Rusa fonto el interreto

Respondo:

la kafaj

Jen iom pli detala solvo:
la nigra bovino donas a kg da lakto tage, dum la kafa b kg tage. Dum 5 tagoj oni ricevos 5 (4a+3b) kg da lakto. Dum kvar tagoj 4 (3a+5b).
Forminte per ili ekvacion, ni ricevos

8a= 5b aŭ a= 5/8 b,

do a < b

2.
La komercisto

Iu komerciso aĉetis varojn pagante 157 rublojn kaj 50 kopejkojn [7] *Sciinte ke la nombro de la unurublaj banknotoj egalas al tiu de moneroj duonrubloj, trovu kiom da moneroj estis entute?*

Respondo:

157 rubloj kaj 50 kopejkoj estas 315 duonrubloj. La kvanto de duonrubloj konsistigas unu trionon, t.e. 105 moneroj. Tiom estas ankaŭ unurublaj banknotoj.

Pli detale:

Estas a unurublaj banknotoj kaj a duonrublaj moneroj, entute 2a +a duonrubloj = 3a duonrubloj aŭ 315 (157*2+1) de kie rezultiĝos 105 banknotoj je unu rublo kaj tiom da duonrublaj moneroj.

3. La patro

[7] 1 rublo =100 kopejkoj

Iu patro havis sep nepojn. La sumo de la aĝoj de la unua kaj la kvara nepoj estas 9 jaroj, de la kvina kaj la sesa 8 jaroj, de la dua kaj la kvina 8 jaroj, de la dua kaj la tria 9 jaroj, de la tria kaj la sesa 6 jaroj, de la kvara kaj la sepa 4 jaroj, kaj fine de la sepa kaj la kvina 4 jaroj. Kiom jara estas ĉiu nepo?

Respondo:

Respektive 6, 5, 4, 3, 3, 2, 1 jaroj

4.
La ĉevalo

La ĉevalo formanĝas certan kvanton da fojno dum unu jaro, la kaprino dum du jaroj kaj la ŝafino dum tri jaroj. Kaj ĉiuj tri, dum kiom da tempo formanĝus tiun fojnon?

Respondo:

Kune ĉiuj tri formanĝas tiun fojnon dum 6/11 de jaro.

5.
Globo

Imagu la teran globon ĉirkaŭvolvita de ŝnuro, same futbalpilkon ĉirkaŭvolvita de ŝnureto. Se ambaŭkaze ni plilongigus la ŝnuroj je unu metron pli, certe kreiĝus libera spaco inter ambaŭ ŝnuroj en ĉiu, jen en la tera globo, jen en la futbala pilko. Ĉu vi povas diveni ĉe kiu el ili tiu libera spaco estus pli granda?

Respondo:

La libera spaco estos la sama, ĉar la raporto de la cirkonferenco al diagonalo estas konstanto.

Tiu spaco estus relative granda, tra ĝi povus eniri eĉ kato!

Kial?

Ĉar

$R - r = 1m / (2\pi) = 100cm / (2\pi) =$ proksimume 15 cm

6.
La korto

Sur la korto kuras kokinoj kaj porkoj. Entute ili estas 20 kaj havas 52 piedojn. Kiom da kokinoj kaj kiom da porkoj estas en tiu korto?

Respondo:

6 porkoj kaj 14 kokinoj

(6*4+14*2 = 52)

7.
Arditi[8]

Ardit aĉetis lunde sakon da pomoj kaj tuje formanĝis tri el ili. Marde li formanĝis la duonon de la restintaj pomoj. Merkrede li rimarkis ke en la sako plurestis nur du pomoj. Ĉu vi povas diveni, kiom da pomoj estis en la sako dekomence?

[8] Albana virnomo

Respondo:

7 pomoj

8.
La futbalteamo

En la futbala teamo estas 11 anoj. Ilia averaĝa aĝo estas 22 jara. Dum la matĉo oni ekskludis unu futbaliston, sekve la averaĝa aĝo fariĝis 21 jara. Ĉu vi povas diveni kiomaĝa estis la ekskludito?

Respondo:

32 jara

Pli detale: la sumo de la aĝoj por 11 futbalistoj estas 11 x 22= 242 jaroj. Post ekskludo, ĝi fariĝas 10 x 21= 210 jaroj, do la diferenco 242 - 210 = 32 jaroj

9. **La vendejo**

Kelkiu aĉetis surtuton, ĉapelon kaj botojn, pagante 140$. La surtuto kostis 90$ pli ol la ĉapelo dum la surtuto plus ĉapelo kostis 120 $ pli ol la botoj. Kiom da dolaroj kostis ĉiu el la varoj?

Solvo

Ni notu per x la koston de surtuto, per y de la ĉapelo kaj per z tiun de la botoj. Formu la ekvaciojn

$x + y + z = 140$

$x = 90 + y$

$x + y = 120 + z$

Anstataŭigu (x + y) de la tria ekvacio en la unua

$120 + z + z = 140$, de kie rezultiĝas

$2z = 20$ kaj $z = 10$

Anstataŭigu x de la dua ekvacio en la tria

$90 + y + y = 120 + 10$

$2y = 40$

$y = 20$

Rezultiĝas

$X = 90 + 20 = 110$

Do, la prezoj estas respektive

110, 20 , 10 (usonaj dolaroj)

La aŭtoro (maldekstre) kune kun liaj kolegoj dum matematika konkurso en la lernejo (2005)

La lernantoj de la tutnacia mezlernejo pri hotelumado kaj turismo, Tirana 2005

Eroj el la historio de matematiko

La pratempaj babilonanoj

Ekde la jaroj 2000-600, antaŭ Kristo, Babilono konis grandan disvolviĝon surkampe de matematiko. Ties sciuloj malkovris la raporton de cirkonferenco al la diametro de la cirklo: π.
Tiam estis konstruita la giganda Zigurato, la bibleca turo de Babelo kaj la Pendiĝantaj Ĝardenoj. (cetere unu el la sep antikvaj mirakloj)

Ziggurato

Sep mirakloj

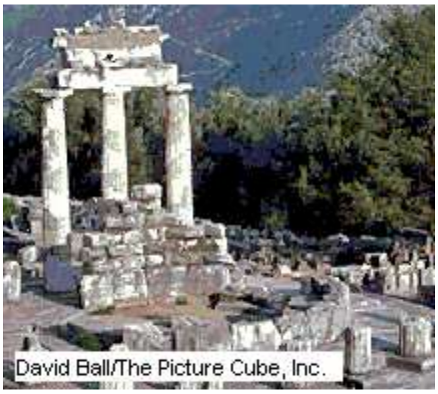
Pro tio, ili ege bezonis kalkuli la surfacojn kaj volumenojn. Tiam estis inventita la sistemo de numeracio je bazo 60.
Laŭ babilonanoj, la kvadratoj de la entjeroj reprezentas la riĉaĵojn kaj rikoltaĵojn. La agrikltura produkto dependas de la surfaco kaj tiu lasta de la kvadrato de la seĝo. Plue, babilonanoj volis scii je kia kondiĉo tiu kvadrata kvanto povus dividiĝi en du malgrandajn kvadratojn.
Tiel rezultiĝis la Pitagorecaj triopoj 3, 4 , 5 aŭ 5, 12, 13 ktp. senfine.
(Tion ni malkovris danke al iu argila plato el la jaro 1900 antaŭ Kristo).

Unu tia plato, nomata Plimton 322, troviĝas en la universitato de Yale, Kalifornio kaj entenas 15 pitagorecajn triopojn.

Grekaj matematikistoj

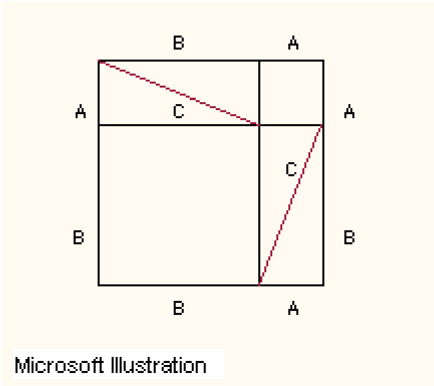
Pitagoro

Pitagoro naskiĝis en la insulo de Samos ĉirkaŭ la jaro 580 antaŭ Kristo. Li estis vizitinta Egipton, Babilonon kaj Baraton. Li sukcesis viziti ĉiujn sep miraklojn de la tiama mondo. Unu el ili, La Templo de Hera situis tute apude de Samos. Ne for de ĝi situis ankaŭ Koloso de Rhod, inter la ruinaĵoj de Efeso.
Reveninte en Grekion li forlasis Samos-on kaj iris al Crotona, ĉe la suda ekstremo de Italio. Crotono estis parto de la tiamaj grekaj kolonioj. Proksime de Crotono, estis alia templo de orakloj, simila al tiu de Delphi, antaŭvidanta la fortunojn de la popoloj kaj nacioj.



Oraklo de Delphi

Laŭ Pitagoro, "la nombro estas ĉio". La sekreta asocio fondita de li sin dediĉis al la studado de nombroj. Kune kun kolegoj Pitagora malkovris vicon da nombraj klasoj. Ekz. la perfektajn nombrojn, t.e. tiujn nombrojn kies divizoroj sen ili mem sumas al la nombro mem. (6 =1+2+3, 28 = 1+2+4+7+14) .
Pitagoro famiĝis per teoremo portanta lian nomon, kvankam enhave ĝi konatis eĉ de babilonanoj.



Pitagora sciis ke la kvadratoj povas repezentiĝi per vico da neparaj nombroj

(4= 1+3; 9 =1+3 +5; 16 = 1+3+5+7).

Sed pitagorianoj konis ankaŭ la frakciojn: ½; 1/3; 5/8; 147/1769, k.t.p.
Ili estis la unuaj malkovrintaj la iraciajn nombrojn kiel **π**, la duan radikon de duo, k.t.p. Sed tio estis granda sekreto por ili. Laŭ legendo, Pitagora mem mortigis tiun, kiu tentis diskonigi la sekreton.
Pli malfrue, dum XIX jc, Georg Cantor malkovris la senfinecon kaj malnumereblecon de tiu nova granda aro de iraciaj nombroj, malgraŭ la mokaĵoj de Leopold Croneker (1823-1891) kiu deklaris ke "Dio estas donacinta nin la entjerojn, dum ĉio alia estas verko de la homoj".
La simbolo de pitagorianoj estis regula kvinangulo, en kiu, desegninte ties diagonalojn ni formas alian pli malgrandan kvinangulon kaj tiel senfine. Ĝuste tiun simbolon oni surmetis sur la tombo de Pitagoro.
Punkto de diagonalo dividigas ĝin je raporto 1.618 kio estas la tiel nomata "ora tranĉo".
Tiu lasta aperas mirinde en la naturaj fenomenoj kaj speguligas la proporcion tra kiu la homo perceptas la belecon. Ĝi estas ja la limeso de la raporto de la nombroj de Fibonaĉi[9]

Por obteni tiun raporton ni adiciu 1+1, poste premu sur la butono 1 / x de la elektronika kalkulilo, aldonu 1, poste premu denove 1 / x, aldonu 1 kaj daŭrigu similmaniere. Sur ekrano aperos jen 1.618, jen 0.618 alterne.
La ora tranĉo estas la dua radiko de 5 minus 1, dividita per 2:

($\mathbf{(\sqrt{5} - 1)/2}$].

Kiel vidite, ĝi reprezentas iracian nombron.

Pitagorianoj malkovris harmonion en la muziko, ĝuste vidante la oran tranĉon en la raportoj de la nombroj 1, 2 , 3 kaj 4 je sumo 10.

[9] Itala matematikisto

Sed la deko estas ja bazo de la sistemo samnoma. Formiĝas triangulo egallatera per ĉi tiuj dek nombroj, nomata tetraktys, sankta.
La deko koniĝis kiel bazo por nombroj ĉe Aristoklo kaj Ovido ĉar la manoj havas dek fingrojn.

Al Pitagora oni atribuas kelkajn malkovrojn:

La iraciajn nombroj.
La relacion inter hipotenuzo kaj katetoj $c^2 = a^2 + b^2$
La distingon inter primoj kaj ne primoj.
Malkovron de multaj ideoj en muziko kaj astronomio.
La formulon pri la diagonalo de la kuboido $d^2 = a^2 + b^2 + c$

Arkimedo

Sendube, la plej brila matematikisto de antikveco estis Arkimedo (287-212 antaŭ Kristo). Li loĝis en Sirakuzo de Sicilio. La patro estis la renoma astronomo tiutempa, Phedias, kuzo de la reganto de Sirakuzo, Hieron II.
La metodo de Arkimedo anticipis tiujn de la Kalkulo aperinta nur dum XVII-XVIII j.

Arkimedo

Preferata teoremo de Arkimedo rilatis al la enskribita sfero en la cilindro.

Mapo de la Romia Imperio

Oni dediĉas al Arkimedo la malkovron de la nombro π kiel raporton de cirkonferenco al ties diagonalo.
Naskiĝinta en Sirakuzo de Sicilio, oni opinias ke li studis en Aleksandrio de Egipto. Tie li konatiĝis kun la disciploj de Euklido. La ceteron de sia vivo li pasigis en Sirakuzo. Arkimdedo inventis la principon de la levilo kaj maŝino de altirado-pulio-n. Cetere li inventis la ŝraŭbon ege utila por konstruado, por muntado kaj malmuntado de diversaj aĵoj. Same li inventis la radiajn spegulojn per kiuj li koncentris la sunan energion sur unu punkton - fokuson kiun li reguligis por koincidi al la veloj de la malamikaj boatoj, kio kaŭzis ties bruliĝon.
Ankoraŭ ne sciatas la cirkonstancoj de lia morto, sed la legendo parolas pri romia soldato kiu murdis lin dum kiam Arkimedo desegnis figurojn sur la sablo.

Alia greka eminentulo en matematiko estas sendube

Eŭklido.


Euklido inter siaj lernantoj

Lia libro “Elementoj” estas ankoraŭ la ĉefa fonto de la matematikaj scioj konataj de ni ekde antikveco. Mem la libro konsideratas kiel la plej granda ĝis nuntempo.


Euklido

Eŭklido loĝis en Aleksandrio ĉirkaŭ la jaro 300 antaŭ Kristo.

Fragmento el la libroj de Euklido

Kvankam, laŭ Herodoto, geometrio devenis el Egipto ĉirkaŭ 3000 jaroj antaŭ Kristo, la grekoj havas meriton ke tion ili transformis en sciencon. Ili alportis unuafoje la terminon Teoremo, Aksiomo, Logikaj sekvencoj kiel "Se A implicas B kaj B implicas C, tiam A implicas C" .

Eudokso

(Va jarcento antaŭ Kristo)

uzis la ideojn pri "infinitezimaloj" por elkalkuli diversajn surfacojn. Per la metodo de interpolacio, li ankaŭ elkalkulis surfacojn. Tiel li trovis proksimuman surfacon de la cirklo helpe de plurgonoj.

Eudokso

Alia granda matematikisto greka estis

Diofanto.

Ĉio kion ni konas pri li baziĝas sur la teksto aperinta sur tomba plato:

"*Ĉi tie estas la tombo de Diofanto. Unu sesonon de sia vivo li pasigis kiel junulon. Kiam li aĝis 20 jara, liaj vangoj kovriĝis per haroj. Pasis ankoraŭ sep jaroj kiam li edziĝis, kaj post pliaj kvin naskiĝis lia filo Alas. Tiu lasta mortis kiam aĝis nur la duonon de la aĝo de Diofanto. Kvar jarojn Diofanto konsolis sin ĝis la morto. Ĉu tio ne sufiĉas ke vi divenu kiom jarojn vivis li?"*

(**Respondo** : 84 jara) .

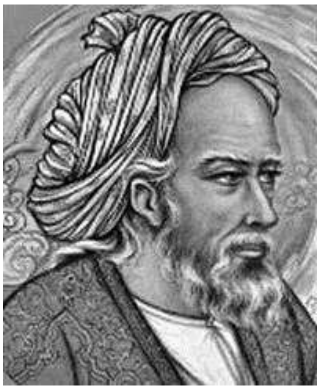
Oni opinias ke Diofanto vivis ĉirkaŭ la jaro 150 antaŭ Kristo. Li verkis la libron "Arithmetica" kie elvolviĝas la algebraj konceptoj kaj stariĝis vico da ekvacioj. Estas 15 volumoj el kiuj plurestis ĉe ni nur 6. La ceteron pereigis la incendio en la biblioteko de Aleksandrio.

Arabaj matematikistoj

Araboj antaŭenigis la sciencon tiam, kiam Eŭropo plurestis en Mezepoka mallumo kaj estis trafita de plago kaj aliaj homaj konfliktoj.

La arabaj landoj

Je la jaro 632 post Kristo, Muhameto starigis islaman ŝtaton centre en Meko. Poste, scienca centro fariĝis Bagdado. Araboj eltradukis la verkaĵojn de grekoj.


Omer Khajam

Je la komenciĝo de jaroj 800 aperis "Arabaj noktoj", elgrekiĝis Eŭklido. La kalifo Al Mamun subtenis la fondiĝon de La Domo de Scioj kies membro estis ankaŭ mem Mohamed Ibn Musa Al-Horezmi.

Ĉi lasta luis la hindajn simbolojn de numeroj kaj la babilonan kaj grekan heredaĵon pri geometrio. Araboj estis interesitaj pri la Pitagoraj triopoj je entjeroj.

Al-Horezmi

Italaj matematikistoj

Leonardo da Pisa, Fibonaci
(1180-1250),

Internacia komercisto, estis vizitinta la konatajn centrojn tiutempajn kaj ĉikaze studadis ankaŭ la grekan, romian kaj araban kulturojn.

[10]

Koloseo

Li verkis librojn "Quadratorum" kaj "Liber Abaci", kie li enmetis ankaŭ la "arabajn" ciferojn. Li famiĝis per la problemo de leporoj :
"kiom da leporaj geparoj estiĝos post unu jaro se ĉiu geparo naskas novan geparon ĉiun monaton, dume la nova geparo kapablas naski ekde la dua monato".

[10] La vera nomo estas Leonardo de Pisa aŭ Leonardo Pisano ĉar li devenis de Pisa

Italio

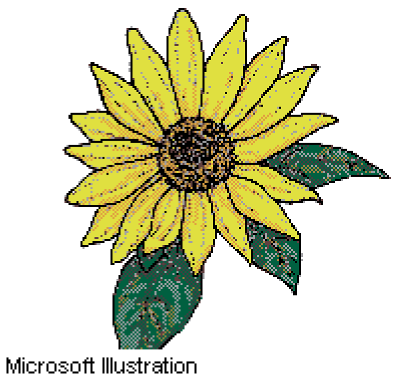
La Fibonaĉi serio jenas:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,…

(ĉi tie ĉiu numero, komencante de la tria, estas sumo de du aliaj antaŭ ĝi)

Interesinde ke la raporto de du sinsekvaj nombroj en ĉi tiu serio havas kiel limeson ĝuste la tiel nomatan oran tranĉon (√5 –1)/2.

La Fibonacci serio aperas ĉie en la naturo. La folioj sur la arbobranĉoj kreskas je distanco unu de la alia konforme al la nombroj de Fibonacci serio. Ĉi nombrojn ni renkontas ĉe la floroj. La plimulto de la floroj karakteriziĝas de tia eco: la nombro de ties petaloj egalas al unu el la jenaj: 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, aŭ 89. Tulipoj kutime posedas tri petalojn, la "buteraj glasetoj" kvin, delphinium ofte ok, marigols 13, asters 21, daisies kutime 34 aŭ 55 aŭ 89.. Ankaŭ ĉe helianto oni konstateblas ĉi supre menciitajn nombrojn.



La helianto

La floretoj - fariĝontaj semoj- ĉekape de la helianto estas lokitaj en du vicoj da girantoj: unu laŭ direkto de moviĝo de la hormontriloj kaj la alia kontraŭe. La nombro de la girantoj laŭ hora direkto estas ofte 34 dum la kontraŭa 55. Kelkfoje ĉi nombroj estas 55 kaj 89 kaj iamfoje eĉ 89 kaj 144.


Tulipoj

Kelkaj italaj matematikistoj sin okupintaj per algebro, alinomiĝis "kozistoj" ĉar araboj konsideris la kvanton "aĵo" kio en la itala vortiĝas kiel "cosa" (koza). Ili estis

Luca Pacioli (1445-1514),

Geronimo Cardano (1501-1576),

Niccola Tartaglia (1500-1557) k.t.p.

Je la unuaj jaroj post 1500 Tartaglia malkovris formulon por la radikoj de la triaranga ekvacio.

Nicola Tartaglia

$x^3 + px + q = 0$

La solvoj jenas:

$$\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Cardano sciiĝis pri tio de Tartaglia promesante ke li tenos la sekreton, sed pli poste li aŭdis ke la formulo estis konata ankaŭ de

Scippione del Ferro (1456-1526),

kiu publikigis ĝin en sia libro "Ars Magna" en la jaro 1545. Tartaglia koleriĝis kaj ekatakis Cardanon venĝeme.

Sesio de amuziga matematika kunveno kun lernejanoj

La francaj matematikistoj

Unue ni menciu la faman problemon de

Fermat[11].

Pierre Fermat (1601-1665)

Se la ekvacio $x^2 + y^2 = z^2$ kontentiĝas je senfina triopo da entjeroj laŭ formuloj

$x = a^2 - b^2$

$y = 2ab$

$z = a^2 + b^2$

(ekz. 3,4,5 aŭ 5,12, 13, aŭ ties multobloj), akirante tiamaniere la tiel nomatajn pitagorajn nombrojn, ĝenerale la ekvacio $\mathbf{x^n + y^n = z^n}$ ne solviĝas je entjeroj se $n \geq 3$, t.e. ne solviĝas je entjeroj la ekvacioj:

$x^3 + y^3 = z^3$,

[11] Pierre Fermat (1601-1665)

$x^4 + y^4 = z^4$

k.t.p.

Antaŭ la jaro 1993, en ĉiuj lernolibroj kaj matematikaj informiloj oni diris ke la supra problemo ne estas jam pruvita, nek nuligita. Oni estis akirintaj partikularajn rezultojn, ekz. la teoremo estis pruvita por certa finita nombro n, ni supozu por n < 4996 sed ne por ĉiu n.
Tiu problemo penigis la matematikistojn dum 350 jaroj[12], sed instigis ilin malkovri novajn teoriojn de la matematika scienco, tiomgrade ke iu matematikisto ŝerce diris ke li estas jam sukcesinta trovi la solvon sed li ne volas publikigi ĝin ĉar "ne volas buĉi kokinon kiu donas orajn ovojn":
La matematikistoj motiviĝis des pli pro la fakto ke mem Fermat estis notinta ĉe marĝinoj ke "li konas jam la solvon, eĉ ke li trovis miraklan pruviĝon, sed tio estas sufiĉe longa por prezenti en tiu paĝo - marĝino".

Fakte la pruviĝo de **Wiles**[13] prezentita en Londono en la jaro 1993, entenas 200 paĝojn. Ĉu ankaŭ Fermat posedis tiajn argumentojn aŭ li proponis pli racian vojon? Tion ni ankoraŭ ne scias.

Évariste Galois

Galua 15 jara- portretigita de samklasano

Evariste Galua naskiĝis en la jaro 1811 en la vilaĝeto Bourg-la-Reine, apud Parizo.. Li kreskiĝis per la idealoj de demokratio kaj libereco. Sed tiutempe en Francio revenis Burbonoj, dum Galua estis respublikisto kiu arde kontraŭis la monarkismon.

Li kreis sian algebran teorion. Verkis dumnokte. La laboraĵon li sendis por recenzo al Chauchy [14], sed ĉi lasta, tro okupita kaj samtempe iel aroganta kaj nezorgema, perdis ĝin en la rubaĵujon.

[12]Definitive la problemo solviĝis de Wiles en la jaro 1993

[14] Fama matematikisto

Cauchy

Galua tentis denove. Li kutimis ellabori siajn ideojn parkere, ne skribe, koncentriĝante al la kerno, ne al la detaloj kaj nur kiam atingis ion gravan, notis ĝin surpapere. Tial li fiaskis dufoje en la ekzamenoj ĉe Politeknika Instituto, tiutempe la arbidujo de matematikistoj en Francio. Malfeliĉe mem la profesoroj ekzamenantaj lin estis eĉ malpli kapablaj ol Galua mem.
La patro de juna matematikisto (estante urbestron, respublikisto), sin mortigis pro intrigoj de liaj rivaloj politikaj.. Tio ege ĉagrenigis Galua.

En la jaro 1830 Galua partoprenis la demonstraciojn kontraŭ la reĝon. Pro tio oni ekskludis lin de la lernejo. Li volis tutorigi pri matematiko sed neniu komprenis liajn profundajn ideojn. Tiam li aliĝis al la armeo. Tie verkis laboraĵon pri la solviĝo de la ekvacioj (teorio de Galua), kiun li sendis por recenzo al **Simeon Denis Poisson** (1781- 1840), en Akademio de la Sciencoj. Sed ankaŭ ĉi lasta ne aprecis lian laboraĵon., simple ĉar la akademiano (!) ne komprenis tiun kolegon nur deknaŭjaran. Tiam Galua decidis forlasi matematikon kaj fariĝi profesia revoluciulo.

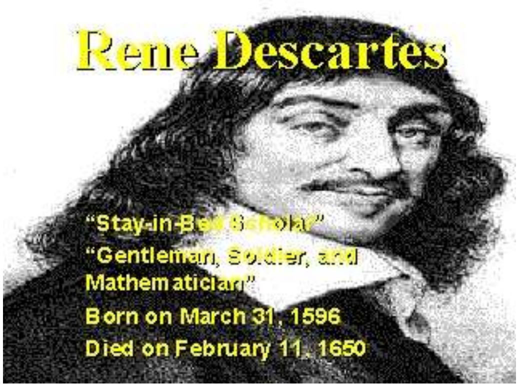
Francio

Sed dum iu bankedo, la 9-an de majo 1831, li ektostis por la reĝo Lui Filipo, Dukon de Orleano, tenante en la alia mano tranĉileton. Tiu gesto komprenatis de la reĝaj spionoj kiel ia minacago kontraŭ la reĝon. Aliflanke, ĉiuj 20 partoprenantoj eksentis tuj ribelemon en si. La morgaŭon oni arestis la junan Galua.
Lia advokato eksplikis ke la tranĉileto montris ke " se Lui Filipo perfidos, ni mortigos lin". Ankaŭ la kamaradoj subtenis Galua-n kaj la juĝejo deklaris lin senkulpa. Sed monaton poste oni arestis la junulon kiel danĝeran respublikiston. Ĉi foje la juĝejo trovis pretekston por kondamni lin al ses monatoj da enprizoniĝo. Eliprizoniĝinte, (nur 21 jara) oni ne scias per kio Galua okupis sin. Sed onidiris ke li enamiĝis al juna

virino. Kelkiu diris ke tiu virino estis ia lumbriko por ke implicu lin en kontraŭreĝan agadon kaj tiel akuzi lin antaŭ la juĝejo.
Envere, ekevidentiĝis ke la virino estis ordinara prostituino. Iu viro sin prezentis kiel ŝia edzo kiu “protestis kontraŭ la junulon pro malhonorigo”. Li invitis lin, laŭ tiamaj moroj, al duelo, kaj Galua estis devigite akcepti la defion, malgraŭ ĉiajn klopodojn por konvinki tiun viron ke li neniel intencis malhonorigi iun ajn.
Nokton antaŭ la duelo, Galua skribis kelkajn leterojn. Li rakontis en ili ke bedaŭrinde li viktimiĝis pro fivirino. Sed la plimulton de la noktaj horoj li reskribis ĉiujn siaj ideojn rilate la algebran teorion.
La leteron tiuteme li adresus al **Auguste Chevaliert.**[15]
Tagiĝinte, la 30-an de majo 1832, Galua kunfrontiĝis al sia defianto sur dezertigita kampo. Oni pafis sur lin en la stomakon kaj lasis lin kuŝante sola surkampe tutan tagon. Neniu alvokis iun mediciniston. Finfine, lin trovis vilaĝano kiu veturigis lin al la hospitalo kie Galua mortis la morgaŭan matenon.

Galua vivis nur 22 jarojn. Je 1846, la matematikisto J**oseph Liouville** publikigis la elegantan laboraĵon de Galua sur la revuo. Ekde tiam, la ideoj de Galua servis kiel grava paŝo al la solvado de la problemo Ferma.

Rene Descartes - sinjoro, soldato kaj matematikisto



Naskiĝis la 31-an de marto 1596 kaj mortis la 11-an de februaro 1650.
Junaĝe li estis ne tiom sana. La intereson pri matematiko vekigis al li sia patrino. Eniris jezuitan lernejon en Fleche, Francio, kie li studis matematikon kaj filozofion. Pli poste li studis juridikcion en Poiters. Bakalaŭriĝis en la jaro 1616, sed neniam ekzercis tian profesion. En matematiko li estigis revolucion enkondukante la koordinatan sistemon, la aksojn x kaj y.
La analitika geometrio estas ja kreaĵo de Dekarto. Li verkis la libron “Serĉado de la vero en scienco” en la jaro 1637.

Blaise Pascal (1623-1662)

[15] Alia fama matematikisto

Pascal sur poŝtmarkoj

Li estis sciencisto, filozofo kaj matematikisto. Ekde junaĝo, lin altiris geometrio. Dekdujarula li konstruis matematikan kalkulilon, cele helpi sian patron por fari aritmetikajn kalkulojn. En tiu kalkulilo la numeroj presiĝis sur kelkaj metalaj radoj kaj la rezultatoj aperis sur fenestretoj. Hodiaŭ oni konas lian faman “triangulon”, plurvalora. Inter alie, ĝi uzatas por trovi la probablon kaj solvi taskojn el kombinatoriko. Mortis 39 jara, pro stomaka kancero.

Germanaj matematikistoj

Ni priparoli unue pri la fama

Gauso

Ankoraŭ trijara, Karl Gaus rigardis scivoleme sian onklon kiam ĉi lasta kalkulis kaj konstatis eraron, kiun la onklo akceptis mirigite! Ekde tiutage la onklo faris plejeblon por la edukiĝo de sia nepo inteligenta.
Iutage la instruisto punis la etulon pluresti en la klasĉambro kaj adiciu ĉiujn nombrojn de 1-100, dum la aliaj klasanoj estis liberaj ludi ekstere. Sed du minutoj sufiĉis al Gauso trovi la serĉatan sumon. La instruisto ne kredis kiam Gauso anoncis ke li jam plenumis la taskon. Sed li tute miris kiam konstatis ke la rezultato estis tre ĝusta.

Gauso, la princo de matematikistoj, kiam mem matematiko konsideratis la reĝino de la sciencoj..

Kiel nun la lernantoj scias, la metodo de Gauso estis tiu de la aritmetika progresio:

S= (1+100)*100/2 =5050.

Tio motivigis la instruiston ne plu demandi aliajn taskojn por la 15 jarulo.

Enirinte la koleĝon en Brunswick, en la jaro 1796, Gauso verkis la unuan laboraĵon lian, konsistinta el 19 paĝoj, kie enteniĝis 146 kurtaj matematikaj gravaj kaj potencaj propozicioj servontaj kiel enirpunkto al preskaŭ ĉiuj matematikaj malkovroj de XVIII-XIX jarcentoj. La taglibro entenintaj ĉi propoziciojn publikiĝis nur en la jaro 1898 de lia nepo Hamlin.

Je 1801 Gauso publikigis latinlingve sian libron “Disquistiones Arithmeticae”. Li ne sin okupis per la Teoremo de Ferma ĉar dekomence li komprenis ties malfacilecon.

Jen alia germana virino matematikisto

Sophie Germain (1776-1831)

Ŝi uzis tuttempe kromnomon “Sinjoro Leblanc”. Sophie portis viran nomon por eviti la antaŭjuĝojn tiutempe disvastiĝantaj pri la virinaj sciencajn kapablecojn.
En siaj leteroj por Gauso ŝi priparolis aritmetikajn temojn kaj ĉi lasta ege aprecis ilin.
Je 1807, Napoleono invadis Germanion. Ĉi kaze li monpunis germanojn konforme al ties ekonomia bonstato. Gauso ekzemple devus pagi 2000 frankojn kiel eminentan profesoron en Getingeno. Kvankam kelkaj francaj matematikistoj pretis interveni kaj helpi lin, Gauso ne akceptis. Cetere Gauso serĉis kelkiun interveni ĉe la generalo Pernety en Hanovero, tiel li alskribis al Leblanc. Tiam Sophie estis devigita konfesi sian identecon..
Ankaŭ eksciiĝinte pri la vera virina nomo de Sophie, Gauso ne malpliigis sian konsideron pri ŝi.

Sophie Germain, Aprilo 1, 1776 - Junio 27, 1831

Sophie sin okupis per la “Teoremo Ferma”. Ĉi rilate ŝi proponis teoremon kiu diras ke “*se ekzistus solvo por n = 5, tiam la tri nombroj devas dividiĝi per 5*”.
La teoremo dividis la kazojn duparte: la kazo kiam la nombroj dividiĝs per 5 kaj kiam ili ne dividiĝas per 5. La teoremo ĝeneraliĝis ankaŭ por la aliaj potencoj, tiel Sophie Germain akiris ĝeneralan teoremon kiu permesis la pruviĝon de Teoremo Ferma por ĉiuj primoj malpli grandaj ol 100, por la unua kazo.
Tio notiĝis kiel gravan rezultaton reduktinta al la dua kazo la problemon kiam Teoremo Ferma povus malsukcesi por primoj malpli ol 100.
Bedaŭrinde, ambaŭ matematikistoj neniam renkontiĝis persone. Ŝi mortis en la jaro 1831 antaŭ ol la universitato de Getingeno akordigu ŝin la honoran doktorecon, rekomandite de Gauso.

Sophie Germain estas kontribuinte ankaŭ sur aliaj sciencaj kampoj, kiel en akustiko, elasteco k.t.p.

Amalie Emmy Noether

Emma Noether (1882-1935)

Estas alia virino- germana matematikisto kiu multe kontribuis al la moderna algebro.

Nils Henrik Abel

(Norvega juna matematikisto)

Nils Abel 1802- 1829

La aroganteco kaj indiferenteco de Cauchy ege malhelpis ankaŭ la norvegan junan matematikiston Nils Henrik Abel, naskiĝinta en la vilaĝo Fidou.
Ekde 16 jara, lia instruisto instigis Nils legi la libron de Gauso "Disquisitiones". Sed post du jaroj Nils forlasis sian okupon pri matematiko pro la morto de sia patro.
Li reokupis sin per ĝi kaj akiris miraklajn rezultatojn, kiujn li publikigis en la jaro 1824.
Laŭ li, "*la ekvacio de V potenco kaj pli ne solveblas per certa formulo*". La laboraĵon li sendis por recenzo al Cauchy cele trovi taŭgan laborpostenon.
Sed ĉi lasta perdis ankaŭ ĉi potencan laboraĵon matematikan.
En la jaro 1826 Nils veturis mem al Parizo kie li renkontis **Dirichlet** kaj ege pasiiĝis al li. En 1829 Nils mortis pro tuberkulozo dum lia laboraĵo publikiĝis sufiĉe malfrue. Interese ke du tagojn post la morto atingis lian hejmon la anoncletero de universitato de Berlino kiu nomumis lin profesoron.

Nils Abel sur poŝtmarko

Unu el liaj ideoj, “la Abeleca grupo” estas tre grava por la moderna algebro, same por la Teoremo Ferma.


La gelernantoj dum la prelego pri matematiko

Hipatia
(Egipta fascina matematikistino)

Hypatia kiel ŝin imagis Rafaelo

Hipatio konsideriĝas la unua elstara matematikistino, kiu prelegis ankaŭ pri filozofio kaj astronomio. Naskiĝis ĉirkaŭ la jaro 370 kaj mortis en 415 post Kristo. Loĝis en Aleksandrio. Ŝi sin distingis kiel protektanton de la scienco kontraŭ religion. Eble pro tio iu kopta kristano mortigis ŝin. Oni diras ke ŝia morto fermis la tiel nomatan Helenan Periodon.

Kiel neoplatonema filozofo, ŝi sekvis la skolon de Plotinius kiu malkuraĝigis misticismon kaj defendis la logikajn kaj matematikajn studojn. Filino de Theon, instruisto kaj matematikisto kun rilatoj al Biblioteko de Aleksandrio, ŝi vojaĝis en Atenon kaj Italion por plustudi.
Inter siaj studentoj estis jen kristanoj jen ne kristanoj. Mem ŝi estis pagano. Kvankam edzinigita al Isidoro ŝi malŝatis fizikajn plezurojn. Korespondis kun la iama lernanto sia Cyrene, episkopo de Ptolemeo.

Hypatia, pentrita de Charles William Mitchell en la jaro 1885

Oni pensas ke pluraj ŝiaj laboraĵoj estas verkitaj kune kun sia patro Teon Aleksandrikus. Jen parta listo de ili:

- Komento pri la 13 - a volumo de Aritmetiko de Diofanto
- Redaktado de la tria libro de Komentaro de la patro pri Almagesto de Ptolemeo
- Redaktado de la patra komentaro pri Elementoj de Euklido
- Redaktado de komentaro kiu simpligis la Konikojn de Apolono
- Verkis la lernolibron Astronomia Kanono

Ptolemeo

Ŝi kontribuis per la skizo de ĉielaj trupoj kaj invento de hidrometro uzata por difini la relativan densecon kaj gravitecon de la likvoj.

Hypatio laŭ iu imago en la jaro 1908

Honore al Hipatio, oni nomis unu krateron en Luno, Hipatia, apud la krateroj Cyril kaj Theon. Tiu kratero havas dimensiojn 28 x 41 km kaj lokiĝas je 4.3° sude kaj 22.6° oriente.

La meridiano *Rimae Hypatia* je 180 km, lokiĝas norde de la kratero, unu graduson sude de kratero, laŭlonge Mare Tranquillitatis.

Britaj matematikistoj

Krom aliaj grandaj matematikistoj, kiel ekz. Njutono, pri estas parolote poste, ni menciu

Charles Babbage (1791-1871)

Li konsideriĝas kiel la patro de la nuntempaj komputiloj.

Naskiĝis en Totnes, Devonshire, Anglujo. Kiel infano li ne ĝuis bonan sanon, pro tio eniris la lernejon nur je la aĝo 10. Li estis tre scivolema kaj plej interesiĝis pri matematiko kaj ekzaktaj sciencoj. Edukiĝis en Trinity College, Cambridge. Tie li bakalaŭriĝis je escelentaj rezultatoj je aĝo 23.
Babbage estas inventinta la kalkulmaŝinon por la substrahado kiu neniam efikis malbone. Ĝi operaciis per 6 - 8 ciferoj. Li klopodis fari modelon pli perfektan sed ne sukcesis. La nuntempa ordinara malgranda kalkulilo dediĉitas ĝuste al Babbage.

Sed liaj ideoj estis uzitaj por desegni la modernajn komputilojn. Je la aĝo 30 li akiris alian sciencan gradon pri matematiko.
Al Babbage apartenas ankaŭ la projekto de la unua rapidecmezurilo.

Sofia Kovalevska
(Pola matematikistino**)**

Sofia Kovalevskaja (Januaro 15, 1850 - Februaro 10, 1891)

Estis ja eksterordinara virino, same verkistino kaj advokatino por la virinaj rajtoj dum XIX jc. Danke al ŝiaj klopodoj kaj verkado, la virinoj komencis eniri libere en universitatoj. Ŝiaj sciencaj sukcesoj faligis la miton de viroj pri malsupereco de virinoj.
Infano de malgranda nobelulo, ŝi naskiĝis post Ana kaj antaŭ Fedia, tial sentis sin iel petolema. Ŝia prizorgantino faris multe por igi Sofia-n elstaran sinjorinon.

Ŝi sin ekokupis per matematiko plej frue. Unue ŝi trastudis la notaron de la patro, Pjetro, pri Calculus (Diferenciga kaj Integriga Kalkulado), kio vekis la intereson de ĉi lasta pri ŝia pli speciala edukiĝo.

Ekde 14 jariĝo ŝi studis mem trigonometrion por ke ekkompreni ĉapitron de optiko en fizika lernolibro kiun ŝi estis legante. La patro veturigis ŝin al Petersburgo por plua studado. Post la mezlernejo, la unikaj universitatoj kiuj akcepis inojn troviĝis en Svisujo, dume la ŝtato de Caro ne permesis junajn fraŭlinojn vojaĝi eksterlanden.

Tial Sofia edziniĝis formale al Vladimiro Kovalevski, septembre 1868. La geparo restis en Petersburgo dum la unuaj monatoj de geedziĝo, poste vojaĝis al Heidelburgo kie Sofia ege famiĝis.

Je la jaro 1870, Sofia decidis plustudi sub la gvido de **Karl Weirstrass**-it en universitato de Berlino. Weirstrass konsideriĝis tiutempe unu el la plej konataj matematikistoj kaj li komence ne traktis serioze la kunlaboron kun Sofio.

Li ekzamenis ŝin per problemo relative malfacila kaj surpriziĝis pro racia solvo trovita de Sofia, kiun li tuj konsideris geniulon.

Rekompence, li decidis instrui ŝin hejme ĉar en la universitato oni ankoraŭ ne permesis inojn. Tia instruado daŭris kvar jarojn. Konklude, ŝi ofertis tri originalajn laboraĵojn ebligintaj al ŝi sciencan gradon.

Julie 1874, Sofia akiris Ph.D. diplomon de universitato de Gottingeno. Tamen ankoraŭ oni ne certigis ŝin ian laborpostenon. Tiam ŝi kun la edzo decidis reveni Rusujon en Palobino. Post iom da tempo mortis Pjetro, la patro. Ĝuste en tiu malfacila periodo Sofia kaj Vladimiro enamiĝis. Tio donis vivon al infano, filino. Sofia forlasis portempe matematikon kaj ekokupis per beletro. Verkis novelojn, teatraĵojn kaj sciencajn artikolojn por iu ĵurnalo.

En la jaro 1880 ŝi denove okupis sin per matematiko. Verkis pri integraloj de Abelo kaj prelegis en la scienca konferenco, kie oni bonkomprenis ŝin. Tiel vekiĝis ĉe ŝi la deziro trovi laborpostenon surkampe de matematiko. Tiucele vojaĝis denove al Berlino ĉe Weirstrass. Dume mortis la edzo kaj ŝi revenis Rusujon. (Vladimiro estis sin mortiginta pro bankroto de sia aferismo).

Je 1883 Sofia estis invitita prelegi en Stockholmo, kie restadis kvin jarojn kaj ĝuis veran sukceson. Je 1885 oni elektis ŝin ĉefo de la katedro pri meĥaniko, ĉar ŝi estis studinta ankaŭ kristalojn.

Kune kun sia amikino Anna Leffler, Sofia verkis teatraĵon “La batalo por feliĉo”.

Je 1887 denove ŝi ricevis malĝojajn novaĵojn: mortis la fratino Ana, kiu estis intime rilatinta al ŝi.

Je 1888 ŝi verkis la laboraĵon “Rotacio de solido ĉirkaŭ fiksa punkto” konkurante por la premio Brodin de la Akademio de Sciencoj kaj venkis. Ŝi disvolvis la teorion pri nesimetria solido kie la centro de ĝia maso ne troviĝis sur la akso mem. Pro tio la premia mono altiĝis de 3000 al 5000 frankoj.

Tiutempe en ŝian vivon eniris alia viro, Maksim Kovalevski, kiu alvenis en Stockholmo por serio da prelegoj. Tie ambaŭ ili arde enamiĝis. Sed Maksim devus foriri al Francio, kio ne konvenis al Sofio. Tamen ŝi akompanis lin tutan someron ĝis kiam komencis ĉe ŝi dua depresio.

Tiam denove ŝi verkis beletraĵojn. Finskribis “La infanajn Notojn”.

Je la fino de 1889 Sofia revenis en Stockholmo, sed la malĉeesto de Maksim ege malesperigis ŝin malgraŭ ŝi vizitis lin de fojo al fojo en Francio. Ŝin trafis pulma malsano kaj plia depresio. Je 10-an de februaro 1891 ŝi mortis kaŭzante grandan perdon al la scienca mondo.

Kaj nun ni turnu denove al la:

Aliaj problemoj

La katoj

En kvadratfoma ĉambro sur ĉiu angulo estas po unu kato. Antaŭ ĉiu kato estas 3 katoj kaj sur ĉies hvosto kuŝas unu kato.
Kiom da katoj estas en tiu ĉambro?

Respondo:

Ĉiuj kvar katoj kuŝas sur siaj propraj hvostoj.

La ĝemeluloj

Iutage Alfred festis sian naskiĝtagon. Lia ĝemela frato festis la naskiĝtagon du tagojn poste. Kiel tio eblas?

Rezonado:

Alfred devus esti naskiĝinta kelkaj minutoj antaŭ la fino de 28-a de februaro, dum lia ĝemela frato iom post tiu tagofino, t.e. la unuan de marto, dum ordinara jaro (t.e.kiam la jaro havas 365 tagoj). La naskiĝtago envorte estas festita dum ne ordinara jaro, do la 28-an de februaro festis unu frato kaj du tagojn poste, je unuan de marto la alia frato..

La knabinoj

Kvin knabinoj pesiĝas pare je ĉiuj eblaj kombinaĵoj. La pesilo montras laŭvice la valorojn: 90; 92; 93; 94; 95; 96; 97; 98; 100; 101. (kg)

Ĉu vi povas trovi kioma estas la komuna maso de la kvin knabinoj?
(225 kg, 230 kg; 239 kg; 240 kg aŭ 247 kg?)



Respondo:

Se ni notas la nomojn de la knabinoj kurte per A, B, C, D, E, ili fomas 10 diversajn kombinaĵojn, respektive AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE. Ni rimarkas ke ĉiu el la knabinoj partoprenas la kombinaĵojn kvarfoje. (vidu). Tiam la sumo de supraj nombroindikoj devas dividiĝi per 4 por ke trovu kiom da kg estas la entuta pezo.
Do ni havas

90 + 92 +93 + 94 + 95 + 96 + 97 + 98 + !00 + 101 = 956

Dividite per 4 ni ricevos 956 : 4 = 239

La gekokejo

En iu gekokejo estas anseroj kaj leporoj. Se ni nombras iliajn kapojn rezultiĝos entute 32, dum la piedoj 100. Ĉu vi povas diri kiom da anseroj kaj kiom da leporoj estas ?


Respondo:

Ni prikonsideru ke la ansero havas du piedojn kaj la leporo kvar. Se ĉiuj bestoj estus leporoj ili havus 32 * 4 = 128 piedoj. Sed aktuale estas 100, kio signifas ke la diferenco 128 – 100 = 28 rezultiĝas pro fakto ke parto el ili estas anseroj.

28 :2 = 14

Tiam ni havas 14 anseroj kaj 32 -14 = 18 leporoj.

Pruvo: 18 *4 + 14 *2 = 72 + 28 = 100 piedoj..

La azeno kaj la mulo

Iufoje la mulo plendis al la azeno:

- *Mi estas tro ŝarĝita kompare al vi. Eĉ se vi donus al mi 20 kg mi havus la duoblon de via ŝarĝo!*
- *Ne, respondis la azeno - la diferenco ne estas tre granda. Se vi donus al mi 20 kg ni havus la egalan ŝarĝon.*

Ĉu vi povas diri kiom da kg estis ĉies ŝarĝo?

Solvo:

Ni notu per x kaj y la ŝarĝojn de ĉiu el ili, respektive de la mulo kaj de la azeno. Tiam ni formus la ekvaciojn:

x+20 = 2*(y -20)

kaj

x- 20 = y +20

de kie

x= 140 kaj y =100.

Pruvo: 140 - 20 =120 = 100 +20 kaj 140 +20 = 160 aŭ 2* (100 - 20)

Trovu la elpensitan nombron

Elpensu entjeron. Duobligu ĝin. Denove duobligu la rezultaton. Ankoraŭfoje. Kiu el la ĉi subaj numeroj ne povus esti la ĝusta rezultato?

80 1200 48 84 880

Solvo:

Se ni notus la elpensitan nombron per x ni ricevus la sinsekvajn esprimaĵojn:

$x \rightarrow 2x \rightarrow 4x \rightarrow 8x$

t.e. unu multoblon de la ok.
Ĉi econ havas 80; 1200; 48 kaj 880 sed ne 84.

La kokino kaj la ovoj

Unu kaj duono kokino donas unu kaj duonon ovo dum unu kaj duontago. Kiom da ovoj donas unu kokino dum ses tagoj?

Solvo:

Ni notu la suprajn relaciojn laŭvice kiel jene:

1 ½ kokino → 1 ½ ovo → 1 ½ tagoj
1 → 1 ½ → 1 ½ /1 ½ =1
1 → x → 6 tagoj

De kie

x = 6 * 1 ½ = 9 ovoj

Egalaj sumoj

Disdividu la nombrojn 1 - 9 sur du vicoj je egala numera sumo en ĉiu vico

Solvo:

Ni povus envicigi ilin tiamaniere:

1	3	7	9	5
				2
				4
				6
				8

La suna tagmezo

Je 1-an de julio la suno leviĝas je la horo 4 - 35 kaj malleviĝas je 21 - 25. Je kiu horo estas la tagmezo?

Solvo:

Se kiel sunan tagmezon oni akceptas la mezon de la taga tempo, tiam ni havus

21 - 35 – (04 - 35) = 16-50 .

Dividite per 2 rezultiĝas = 8-25 .

Tiam 8 - 25 + 4 - 35 = 13.

Do la suna tagmezo koincidas al la horo 13.

Proporcio

a, b, c estas nombroj rilatantaj je proporcioj:

a /b = 9/4 kaj b/c =5/3.

Tiam kioma estas la raporto (a –b) / (b – c)?

(7/12; 25/8; 4/1; 5/2)

Solvo:

Rememorante la ecojn de la proporcioj ni ricevas:

a / b = 9/4 → (a - b) / b = (9 - 4) / 4 = 5/4

kaj

b / c = 5/3 → (b - c) / c = (5 - 3) / 3 = 2/3

Ni dividu ambaŭflanke

$$\frac{\frac{a-b}{b}}{\frac{b-c}{c}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{a-b}{b-c} * \frac{c}{b} = \frac{5*3}{4*2} \Rightarrow \frac{a-b}{b-c} *3/5 = 15/8 \Rightarrow \frac{a-b}{b-c} = 15/8 *5/3 = 25/8$$

La moneroj

Mi havas 10 sakojn entenantaj po 10 moneroj ĉiu el il. Se en naŭ sakoj la moneroj pesas po 1 g ĉiu, kaj en unu nur 0.9 g ĉiu, ĉu vi povus diveni en kiu sako troviĝas la pli malpezaj moneroj helpe de unu balancilo per ununura pesado?

Solvo:

Ni povus fari tion jenmaniere: ni prenu unu moneron el la unua sako; du monerojn el la dua; tri monerojn el la tria kaj tiel plu ĝis la dek moneroj el la deka sako. Poste ni pesu ĉi prenitajn monerojn kiuj sumas entute

1 + 2 + 3 +....+ 10 = 55.

Se ĉiuj ili pesus po 1 g, tiam la entuta kvanto da ili pesus 55 g. Sed parto el ili pesas po 0.9 g ĉiu, tiel rezultiĝos alia cifero, ekzeple 49.3g kio signifus ke 0.7 g malpli korespondas al la sepa sako el kiu ni jam prenis ĝuste 7 moneroj.
Sufiĉis ja unu pesado.

Kelkaj logikaj problemoj

La kondamnito al morto

- *Oni liveris du biletojn al iu kondamnito al morto, kie laŭdire estis skribita la vorto “vivo” en unu kaj la vorto “morto” en la alia. Sed lastmomente la kondamnito jam komprenis ke en ambaŭ biletoj oni estas skribintaj la vorton “morto”.*
  Li rajtas elekti nur unu bileton. Kiamaniere la kondamnito povus saviĝi elektante la bileton ĝustan?



Respondo

La kondamnito devas preni unu bileton kaj forgluti ĝin tuj. Poste li diru al la ekzekutistoj:
“Ho, pardonu min, mi eraris. Sed por ekkoni mian elekton vi povas vidi la alian bileton kaj prikonsideru la kontraŭon de ĝia enhavo...”

Sinceraj kaj malsinceraj civitanoj

- *La civitanoj de la urbo A estas sinceraj dum tiuj de la urbo B malsinceraj. Ili vizitadas regule unu la alian kaj aspektas, deekstere, tute similaj. Fremdulo troviĝanta en unu el la du urboj volas scii kie li ja estas, demandante nur unufoje kaj ricevante nur respondon “Jes” aŭ “Ne” al sia demando.*
  Ĉu vi povus diveni kian demandon devas fari la fremdulo?





Respondo

Li povus fari la jenan demandon:
“Ĉu vi estas loĝanto de ĉi tiu urbo?”
Se li aŭdas “Jes” li trafis la urbon A, se “Ne” l trafis la urbon B.
Provu!

Kelkaj sofismoj

a = a +b

Ni multipliku ambaŭ flankojn per 5 kaj ricevos

5a = 5b +5c

Se ni multiplikus per 4 ni ricevus

4a = 4b + 4c

Ni adiciu ĉi tiuj egalajn partojn

4a +4c +5a = 5b +5c +4a

Poste ni substrahu po 9a ambaŭflanke

4b +4c - 4a = 5b +5c -5a t.e.:

4 (b +c – c) = 5 (b +c – a)

Kaj post reduktiĝo de la komuna krampo

rezultiĝas

*4 = 5 t.e. 2 *2 = 5 !!??*

Kie estas la eraro?

Alia:

4 Lekoj egalas al 400 centonoj, tiam 2 Lekoj egalas al 200 centonoj

Post potenciĝo duagrade ni ricevos:

4 Lekoj = 40 000 centonoj

Sed 100 centonoj egalas al 1 Leko, do 40 000 centonoj egalas al 400 Lekoj

Do rezultiĝas 4 Lekoj = 400 Lekoj !!??

Kiel tio eblas?!

La paradokso

Ni supozu ke A > B. Ni multipliku ambaŭ flankojn per (A – B). Poste ni substrahu al ambaŭ flankoj AC. Post regrupiĝo kaj divido per (A – B – C) rezultiĝos A = B ?!

Jen ankaŭ la perliteraj operacioj:

$A > B \Rightarrow A = B + C$; $(A - B)A = (A - B)(B + C)$;

$AA - AB = AB + AC - BB - BC$; $AA - AB - AC = AB - BB - BC$;

$A(A - B - C) = B(A - B - C)$;

$A = B$

Respondo: Ne forgesu ke la esprimaĵo A –B –C = 0, cetere estas malpermesate dividu per nul!

Kvazaŭludo

Skribu sur paperpeco nombron kiom grandan vi deziras. Translokigu la ciferojn de ĉi numero laŭdezire. La pli malgrandan nombron substrahu de la pli ganda. En la rezultato demetu unu ciferon laŭdezire kaj montru la restintajn ciferojn laŭ kia ajn enviciĝo vi deziru kaj mi pretas eldiri kian ciferon vi estas forstrekinta jam.

(la forstrekita cifero estas ĝuste tio kiu komplementas la sumon de la ciferoj restintaj por ke la nombro dividiĝu per 9)

La historio de numeracio[16]

La homaro komencis nombri ekde pratempo. Ilia instruisto estis ja mem la vivo.

$1, 2, 3$	$-2, -1, 0, 1, 2$	$-2, \frac{2}{3}, 1.21$	$-e, \sqrt{2}, 3, \pi$	$2, i, -2+3i, 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$
La naturaj nombroj	La entjeroj	La raciaj nombroj	La reelaj nombroj	La kompleksaj nombroj

Ankoraŭ hodiaŭ ekzistas homgentoj surglobe kiuj kapablas nombri nur helpe de siaj manoj. Anstataŭ la nombro 5 ili diras “mano”, anstataŭ 10 ili diras “manoj”, anstataŭ 20 ili diras “manoj kaj piedoj”.

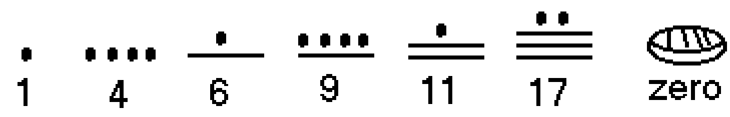
Ekde la komenco matematiko rilatis al la mezurado, precipe la termezurado.
Unu tempomezurilo estis la intervalo inter la du sinsekvaj someroj. Tio nomiĝis jaro. Kiel ties komenciĝo oni konsideris la 21-an de junio, kiu koincidas al la plej longdaŭra tago.
Alia mezurilo estis la monato, aŭ la intervalo inter du sinsekvaj plenlunoj. La luna monato longis proksimume 30 tagojn. En diversaj lngvoj tio bele speguliĝas. Ekzemple en la rusa lngvo la vortoj por monato kaj luno samas (Mjesac). La semajno estis la kvarono de la monato.
Por elkalkuli tagojn ne sufiĉis do la manfingroj, tial oni ekuzis la gravuraĵojn sur la bastonetojn. En ĉi lastaj oni gravuris strekojn jen por ŝuldoj jen por kreditoj.
La bestobredistoj interesatis scii kiom da kapoj estis en siaj gregoj, tial naskiĝis la bezono por pli grandaj nombroj, kelkcentoj, eĉ kelkmiloj.
La agrokulturisto devus scii kiom da agro li semu por ke ĝia rikoltaĵo sufiĉu tutan jaron. Li devus elkalkuli ankaŭ la tempon (momenton) de la semado, kontraŭe li ne ricevus la rikoltaĵon.
Ĉirkaŭ 5000 jaroj antaŭe la homaro faris grandan malkovron, la skribmanieron de la nombroj laŭrange, aparte la unojn, aparte la dekojn, aparte la centojn k.t.p.
Egiptoj uzis ankaŭ figurojn kaj diversajn literojn por prezenti nombrojn.
Babilonanoj uzis la sistemon de numeracio je bazo 60, uzante la signon V kaj < .
Do ili notis jen 60, jen unuon per la signo V.

[16] Laŭ prelego en la lernejo

Spurojn de la sistemo je bazo 60 konservatas ankoraŭ nuntempe. (ni nur menciu la unuojn por la angula kaj tempa mezurunioj)
La gento de Maja en Meksiko uzis la sistemon je bazo 20. Ne mirinde ke ankaŭ ni iamtempe estas uzinta tiun sistemon, ĉar en la albana, ekz., plurestas la vorto “dyzet” (du dudek) por 40 anstataŭ la vorto “katerdhjet” (kvardek).

Kiel oni skribis la nombrojn en pratempo?

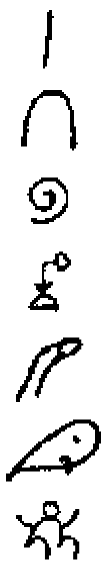
Jen la nombroj skribitaj de indianoj Maja:



8,000						•••
400			•	•	••	• ≡
20	•	••	••	—	•• —	
njësitë			—	••• —	••• =	•••• =
	20	40	445	508	953	30,414

Maldekstre vidiĝas la normala hodiaŭa formo de nombra skribado. Ĉi tie ĉiu nombro Maja estas samvalora al la decimala nombro. Oni legis la nombrojn de fundo al pinto.

La egiptaj nombroj aspektis tiel:

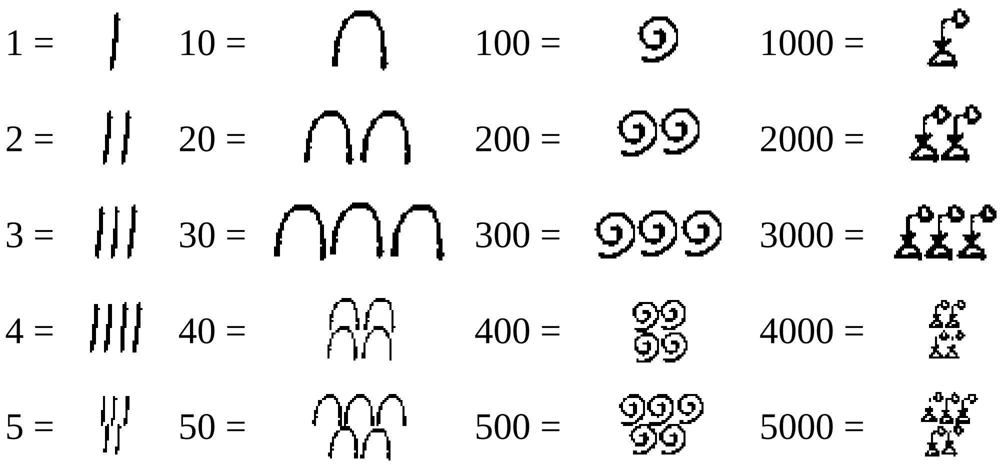


Decimala nombro	Egipta simbolo	
1 =		Bastoneto
10 =		Osteto
100 =		Ŝnurbobeno
1000 =		Lotusfloro
10,000 =		Montrofingro
100,000 =		Eta rano
1,000,000 =		Mirigita homo

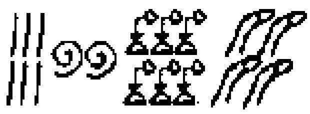
Kiel vidite, prezentiĝas antaŭ ni sistemo konkreta riferiĝanta al diversaj objektoj

Por ke plifaciligu la legadon de la ripetataj signoj ili lokiĝas pogrupe po 2, 3, 4 kaj surmetiĝas vertikalmaniere.

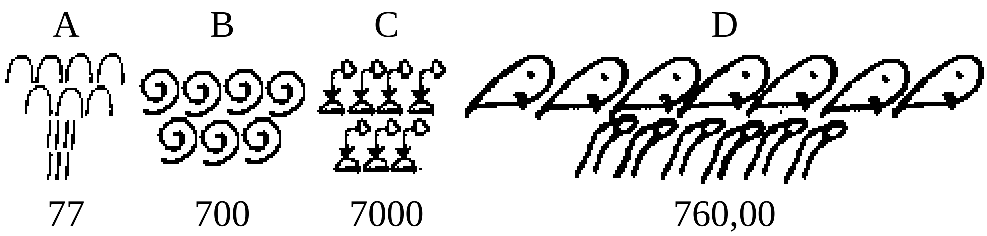
Ekzemplo



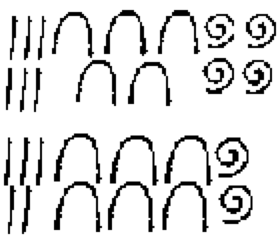
La nombrojn oni skribis de dekstro al maldekstro

46,206 = 

Jen kelkaj ekzemploj ĉerpitaj el tombo-surskriboj



Jen kiel oni adiciis 456 kun 265:

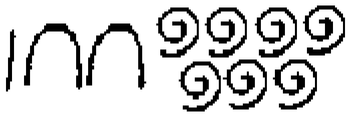


(= 456)

(= 265)

La rezultato skribatis tiel:

Oni devus anstataŭigi dekunuon (|) per unu unuo (|) kaj la deko (∩). Poste ni akirus unu unuon kaj dekdu dekojn. La dekdu dekoj devus anstataŭiĝi per du dekoj kaj unu cento. Fininte, ni ricevus 721 kiu skibatus:



.

La greka sistemo de numeracio aspektis tiel:

La Atikaj simboloj		
𐅅	= 500	
Η	= 100	
Δ	= 10	
Γ	=	5
Ι	=	1

Ekzemple, 𐅅ΗΗΗΔΔΔΔΓΙΙΙΙ prezentis la nombron 849

La originala greka alfabeto entenis 27 literojn kaj skribatis de maldekstro al dekstro. Ĉi 27 literoj reprezentis 27 simbolojn uzitaj en la sistemo de numeracio. Poste la apartaj simboloj uzataj nur de matematikistoj estis vau, koppa, kaj sampi, estingiĝis. La hodiaŭa greka alabeto entenas nur 24 literojn.

1	α	alpha	10	ι	iota	100	ρ	rho
2	β	beta	20	κ	kappa	200	σ	sigma
3	γ	gamma	30	λ	lambda	300	τ	tau
4	δ	delta	40	μ	mu	400	υ	upsilon
5	ϵ	epsilon	50	ν	nu	500	ϕ	phi
6	ϛ	vau*	60	ξ	xi	600	χ	chi
7	ζ	zeta	70	o	omicron	700	ψ	psi
8	η	eta	80	π	pi	800	ω	omega
9	θ	theta	90	ϟ	koppa*	900	ϡ	sampi

*vau, koppa, and sampi are obsolete characters

Kiel vidite, grekoj ne posedis ankoraŭ la simbolon por nul. Per ĉi 27 simboloj ili povus formi ĉiun nombron ĝis 1000. Plue, metinte komon antaŭ ĉiu simbolo sur la unua vico, ili povus skribi ĉiun nombron ĝis 10 000.

Jen la prezentaĵoj por 1000, 2000 kaj por la jam menciita nombro 849.

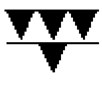
$,\alpha = 1000 \quad ,\beta = 2000$ etc. $\qquad \omega\mu\theta = 849$

Por la malgrandaj nombroj ĉi sistemo funkcias sufiĉe akurate, kaj por la grandaj? Tial grekoj turniĝis al la Atika sistemo kaj ekuzatis la simbolon M por 10 000. Kaj ili uzis la multiplikadon de 10 000 surmetante simbolon super M.

$\mathrm{M}\omega\mu\theta = 10{,}849 \qquad \overset{,\zeta\rho o\varepsilon}{\mathrm{M}}\ ,\varepsilon\omega o\varepsilon = 71{,}755{,}875$

Babilonanoj posedis sistemon de numeracio relative pli antaŭeca eĉ prikonsiderante niajn standardojn. Tio estis la sistemo je bazo 60, alie ol tiu je bazo 10, uzata ankoraŭ hodiaŭ. Babilonanoj dividis la tagnokton en 24 horojn, la horon en 60 minutojn kaj minuton en 60 sekundojn. Ĉi kalkulmaniero konserviĝis jam ekde 4000 jaroj!

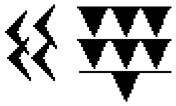
Ĉiu nombro malpli ol 10 notatis per kojnetoj kiel sube:

Ekzemplo **:** 4 

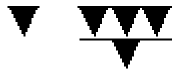
La nombro 10 simboliĝis per kojneto turnita maldekstren

Ekzemplo: 20 

La nombroj malpli ol 60 notatis kombinante la simbolon pri 10

Ekzemplo: 47 

Samkiel nia hodiaŭa sistemo de numeracio ĉe babilonanoj oni uzis la unuojn, la dekojn, la centojn, la milojn.

Ekzemplo: 64 

Tamen, ankaŭ babilonanoj ne posedis simbolon por nul, kvankam mem la ideon ili uzis ja. Kiam ili volis esprimi la nulon, ili lasis blanketon sur la skribata nombro.

Kiam l skribis “60” ili surmetis signon de ununura kojneto sur la dua loko de la nombro.

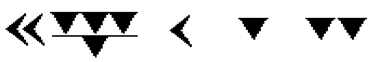
Kiam ili skribis “120” ili surmetis du signojn de kojneto sur la dua loko

Jen kelkaj ekzemploj por la grandaj nombroj:

Ekzemplo: 79883

$(22*602^2)+(11*60)+23$

Ekzemplo: 5220062



$(24*60^3) + (10*60^2) + (1*60) + 2$

Inter la plej pratempaj skribitaj dokumentoj estas la Papiruso de Ahmes (ĉirkaŭ 4000 jaroj antaŭe). Ĝi entenis 84 problemoj. Sed tiutempe ankoraŭ ne ekzistis konforta maniero por notado de la nombroj, nek reguloj por la aritmetikaj operacioj, nek tabulo de multiplikado.

Tamen la egiptoj plenumis la arimetikajn operaciojn ne nur per entjeroj sed ankaŭ per frakcioj.

Sed ili uzis nur la frakcioj-unuojn.

Ekzemple por solvi la problemon:

Dividu egalmaniere 7 panojn por 8 personoj

La respondo jenus tiel: ½ +1/4 +1/8

Do, kvar panoj dividiĝis po duone; 2 panoj dividiĝis po kvarone; unu pano po okone. Entute estis 4+4+4 =12 trancoj.

Alia maniero estus tia: trancu po larĝeco en du pecoj kaj poste desupre en kvar pecojn, kio bezonus 4 + 4 + 3 = trancoj!

Hodiaŭ ĉiun panon oni trancas en ok partojn kaj prenas 7/8 de ĝi. Sed tiamaniee bezonus pli da trancoj kio signifas pli da tempoperdo kaj pli da paneroj. Do,la egiptoj ŝparis kaj raciis pli ol ni!

Ekde pratempo oni konis la egalaĵon:

¼ + 1/97 + 1/56 + 1/679 + 1/776 + 1/194 + 1/388 = 28/97

Babilonanoj uzis la denominatoron 60

Romianoj uzis la denominatoron 12

La frakcioj povas transformiĝi en periodikajn decimalajn numerojn. La periodo povas konsisti ankaŭ el pluraj ciferoj, ekz. 1/49 estas periodika numero je periodo el 42 ciferoj!

Inter la multaj problemoj en la Papiruso de Ahmeso troviĝas ankaŭ la jena:

En unu domo estas sep katoj, ĉiu kato manĝas sep musojn, ĉiu muso manĝas sep spadikojn, ĉiu spadiko donas sep plantojn, ĉiu planto donas sep masojn da rikoltaĵo.
Trovu kiom da masoj da rikoltaĵoj saviĝas entute?

Do, 4000 jaroj antaŭe egiptoj interesatis ankaŭ pri geometria progresio, dum nuntempe ekzistas ankoraŭ homgentoj kiu apenaŭ scipovas adicii 2+3!

Kaj nun jen kiel egiptoj elkalkulis la surfacon de la orta triangulo:

Unue ili desegnis en rektangulo la diagonalon. Tiel formiĝis du kongruaj ortaj trianguloj. Tial la surfaco de la orta triangulo estas la duono de tiu de rektangulo, aŭ la duono de la produkto de ambaŭ katetoj, eĝoj de la triangulo.

Dum por la cirklo oni elkalkulis la surfacon de kvadrato je eĝo 8/9 de la diametro de la cirlo. Ĉar sciitas ke $(8/9D)^2 = 64/81D^2 = 0.790\ D^2$ aŭ proksimume
$\pi\ (D/2)^2 = 0.785\ D^2$

La egipta kalendaro entenis 365 1/6 tagoj. Sed la imperiestro Julio Cezaro en la jaro 46 antaŭ Kristo, ŝanĝis ĝin al 365 ¼ tagoj.
Kial?
Ĉar pro la diferenco ¼- 1/6 = 1/12 tagoj ĝis tiutempe akumuliĝis tia malkoincidaĵo je jartempo kiom la monato de rikoltoj estis jam vintre!
Sed ankaŭ tiu kalendaro enhavis malĝustaĵojn ĉar anstataŭ ¼ tago aŭ 6 horoj aldonendus fakte 5 horoj kaj 48 minutoj. Tial la restinta eraro speguliĝis je unu aldona tago en la jaro 1582, kiam Papo Gregoro ordonis la korektiĝon je unu tago.
La XVI jarcento kiam okazis la ŝanĝiĝo havis malpli da tagoj ol la pasintaj jarcentoj. Tio daŭros ĝis la jaro 3200 kiam aldonendos unu plia tago, kvankam ĉiu 400 jaroj enhavas la saman nombron de tagoj.

La paganaj pastroj estis samtempe la unuaj sciuloj, ĉar ili havis sufiĉan liberan tempon por observi la ĉielon, por studi la ecojn de la nombroj kaj figuroj, por pripensiĝi kaj imagi. Sed ili tenis la sciojn akiritajn sekrete.

En Babilono mankis la metaloj, la ŝtonoj kaj la arbaroj el kiuj oni povus ĉerpi konstrumaterialojn. Ili havigis al si tiujn danke al la komerco kun la ceteraj popoloj. Kune kun la varoj alvenis la landon ankaŭ la scioj. Babilonanoj inventis la frakciojn similajn al tiuj decimalaj, sed je denominatoro 60. Ili ne uzadis signojn por distingi la plenan parton disde tiu frakcia. Komence ili skribis la plenajn unuojn, sur la dua loko la nombron de sesdekonoj, sur la tria loko la sesdekonoj de la sesdekonoj kaj tiel plu.
Tiamaniere ili sukcesis skribi kian ajn onon de la tuto. Pli poste la sesdekonoj nomiĝis minutoj, kaj ties sesdekonoj sekundoj, ks.

6000 jaroj antaŭe babilonanoj inventis la radon, ĉefa parto de veturiloj, maŝinoj diverstipaj, elektraj centraloj. (ekde la poŝa horloĝo, ĝis la kosma raketo).
La rado kaj la bolto notinde helpis la homojn transporti kaj levi grandajn pezaĵojn.

La ujoj je cirkla bazo aŭ rondaj formoj estis produktataj de babilonanoj kaj vendataj vaste.

Jen kiel babilonanoj trovis la cirkoferencon:

$P = (P_1 + P_2) / 2$ kiu P_1 kaj P_2 estis la perimetroj de la kvadratoj en kaj eksterskribitaj al la cirklo.

Kiam la matematiko fariĝis sciencon?

Ĝi fariĝis tia kiam respondis al la demando: Kial?
Kial la surfaco de la triangulo egalas al la duono de la produkto de bazo kaj alteco?
Kial du ajnaj nombroj ĉiam povas adiciiĝi, dum la divido ne ĉiam realigeblas?

Egiptoj bone konis ke la triangulo je eĝoj 3, 4, 5 kubutoj estis orta. Sed ili ne scipovis la kialon de tia relacio.
Matematiko fariĝis sciencon en Grekio. Ĉar grekoj aprecis la disputon, ili eĉ sekvis la proverbon ke “ la vero naskiĝas en disputo”.

Arkimedo

Ĉiun regulon ili klopodis ekspliki, pruvigi kiel veran aŭ malveran.

Romia Imperio

La rezonado kaj pruvado estis potencaj rimedoj de grekoj. Laŭ ili, la nombroj 3, 4, 5 formas ne hazardan triopon.

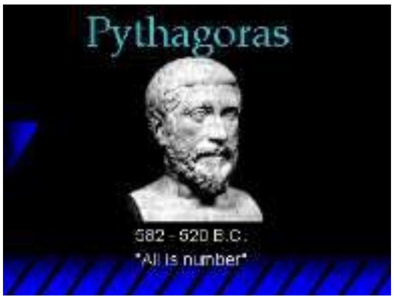
Sed 3*3= 9; 4*4= 16; 5*5= 25; 9+16 =25

Do, la eĝoj de la orta triangulo (egipta triangulo) kontentigas ĉi leĝecon, ĉi formulon, ĉi specialan econ.

Pitagora ĝeneraligis tion per la formulo

$a^2 + b^2 = c^2$

La teoremo de Pitagora estas vera leĝo por ĉiu orta triangulo.



Samtiel, Eratosteno (III jc antaŭ Kristo) donis originalan metodon por difini primojn kaj neprimojn. (La “kibrilo” de Eratosteno). Ekde tiam ne proponatis alia metodo pli ĝenerala tiucele.

Eratosteno

Jen kiel agis li:

Unue li skribis la numerojn laŭvice

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23.....

Komencante de la numero 2, Eratosteno forviŝis ĉiuj aliajn parajn nombrojn sekvantaj 2. Restis post la numero 2, la unua nepara 3, kiun li konservis kaj poste foviŝis ĉiujn multoblojn de 3 post 3, denove post 3 restis la unua malmultoblo de 3, la numero 5 kaj li forviŝis ĉiujn multoblojn de 5 post ĝi, restis ĉifoje la numero 7 kaj li forviŝis ĉiuj multoblojn de 7 ktp.
Tiamaniere restis nur la primoj 2,3,5, 7,11,13,....

Euler poste iom modifis tiun specon de “kibrilo” cele al ties simpliĝo. Laŭ li, ni komence ekskludu el la vico de la naturaj nombroj ĉiujn multobljon de 2, 3 kaj 5 poste ni trovu la restojn el la divido per 30 (komuna multoblo de 2,3,5), kiun povus donu la nombroj kiuj ne divideblas per 2, 3 kaj 5.

Envere, nombro kiu ne divideblas per 2, nek per 3 aŭ 5 estas tiu kies resto el la divido per 30 = 2*3*5 ne divideblas per iu el ĉi nombroj.
Ĉar $5 < \sqrt{30} < 7$,

notinte, el ĉiuj eblaj valoroj de la restoj de la divido per 30, t.e. el la nombroj 0-29, la multoblojn de 2, 3, 5 ni ricevos la nombrojn 1 kaj ĉiuj primojn. Sekve, la serio de la serĉataj restoj jenas: 1; 7; 11;13; 17; 19; 23; 29.

Danke al tiu observado dum la serĉado de primoj (pli gandaj ol 5) ni povas skribi ne ĉiujn sinsekvajn nombrojn sed nur tiujn kiuj rezultigas la ok restojn montritaj ĉi tie de la divido per 30, kio permesas al ni ekonomizi la laboron je maso 30/8 = 3.75 foje.

Oni diris pri matematiko

- Nenia garantio estas en tiuj sciencoj kie ne aplikeblas iu el la matematikaj disciplinoj, eĉ en tiuj havantaj nenian rilaton al matematiko.

Leonardo Da Vinci 1452-1519

- La inĝeniero ne posedanta la matematikajn metodojn fakte estas simpla muntisto. Inĝeniero je la plena senco apenaŭ imageblas sen la matematikaj scioj.

- Nenion oni povas fari sen matematiko, nek pontojn, nek digojn, ne akvopovostaciojn.

I.G. Aleksandrov

- Aritmetiko kaj geometrio estas ja la flugiloj per kiuj la astronomo leviĝas tiom alte kiom li atingeblas la ĉielon

R.Bojl 1627-1691

- Aritmetiko estas ja granda ŝlosilo por malfermi ĉiujn pordojn de la vivo. Helpe de ĝi astronomo atingas la ĉielajn altecojn, la inĝeniero profundiĝas en la montojn, la maristo orientiĝas en forajn marojn.

E. Iveret

- La koncepto de funkcio je ties geometria formo devas estis ĝenerale la animo de la matematika edukiĝo en la lernejoj.

F. Klejn 1849-1925

- Aritmetiko estas la scienco pri estimado de funkcio, dum algebro estas la scienco pri transformado de funkcio.

G. Gavison

Godel, alia eminentulo en modena matematiko

- La plej bona ripetado dum la lecionhoro de aritmetiko estas la studado de algebro.

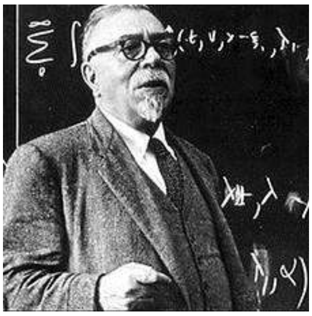
E. Kexhar

- La ekvacio estas ora ŝolsilo por malfermi ĉiujn matematikajn Suzamojn.

S. Koval

Lagrange

- Kibernetiko estus nenio se ĝi ne subteniĝus de matematiko.



Norbert Viner 1894-1964

- Sur la tombo de Johan Keplero (1571-1630) oni estas skribinta ĉi epitafon:
  Mensus eram coelos, nunc terrae metior umbras.

Mens coelestis erat, corporis umbro jacet.
(Mi mezuris la ĉielon, nun mi mezuras la noktajn ombrojn; mia animo vivis en la ĉielo, ĉi tie kuŝas la korpa ombro)

Johano Keplero

- Sur la tombo de Isaak Newton oni estas skribinta pri li kiel: *"plibeliĝo de la homa genieco*", dum sur monumento en Kembriĝo "je racio li jam transpasis la homan geniecon*"*

Njutono

- Pri Leonard Euler oni diris ke: “li elkalkuladis samtiel la aliuloj enspiradis”. Li posedis du valorajn ecojn: elstara elkalkulisto kaj fenomena memorkapablo.

Leonard Euler

Oni rakontas ke iamfoje kiam li ne povis endormiĝi, sin okupis per la elkalkulado de la sesa potenco de la unuaj 100 nombroj kaj la tabelon de la rezultatoj akiritaj li ripetis parkere dum pluraj sinsekvaj tagoj.
Alifojon li elkalkulis dum horo la dudek unuajn ciferojn de la nombro π, por ke pruvu kiom taŭga estis ja serio trovita de li.

- Aleksis Klod Klero (1713-17650) je aĝo 12, prelegis en Akademio de la Sciencoj. Je aĝo 18, kontraŭ la regularo, Akademio akceptis lin kiel sian membron.

Enrico Fermi

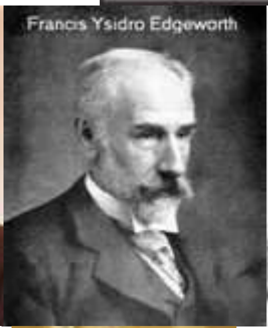
- Laplas esprimis tiel la pasion por la scienco de XVIII jc:

Pierre-Simon Marquis de Laplace (1749-1827)

La menso kiu ekkonus ĉiujn fortojn agantaj en la naturo en certa momento, same la relativan pozicion de ĉiuj partikloj ĝin konsistigantaj, eĉ pli larĝe, ĉi datenojn ellaborus per matematika analizo, forkaptus per ununura formulo la moviĝon de la korpoj jen grandaj jen mikroskopecaj. Ĝi estus tutsimile jen kiel pasinte jen kiel future.





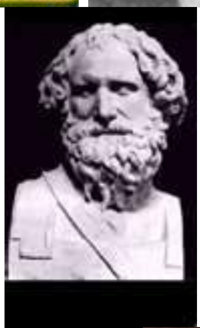


Francis Ysidro Edgeworth





crepido@hotmail.com

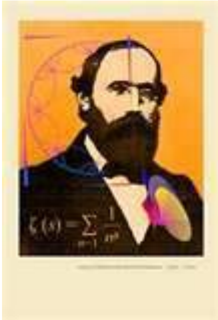

USA Enrico
34 Fermi



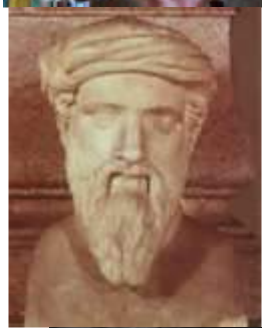


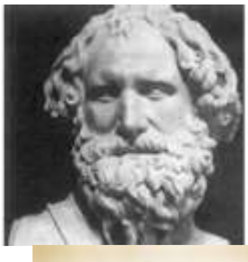








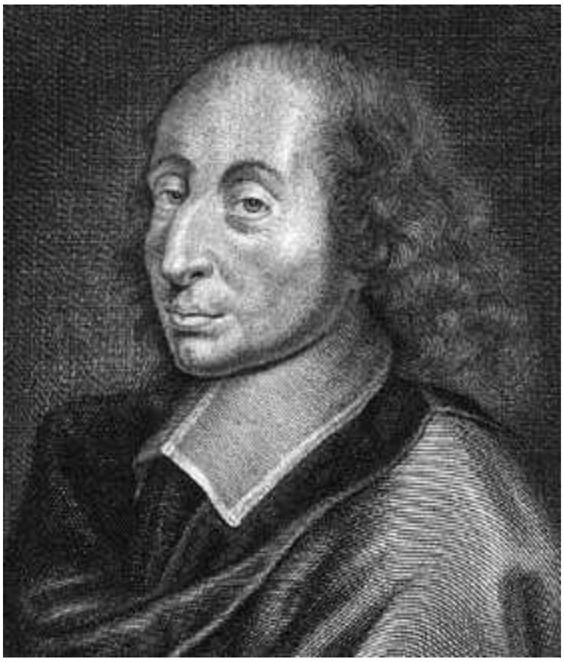




Isaac Newton (1643-1727)

[**Carl Friedrich Gauss**]

Blaise Pascal




1623 PASCAL 1662
POSTES 1f20+2f80
FRANCE

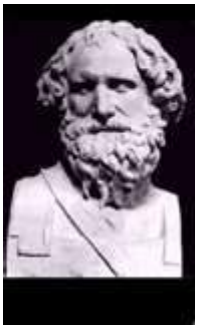

BLAISE PASCAL
1623-MONACO-1973 0,50


0,50
PASCAL
1623-1662
REPUBLIQUE FRANCAISE
POSTES


500
BANQUE DE FRANCE
500
77717
X.165
X.165
77717

Galerio de modernaj matematikistoj






Colosus