Perturboj de la suncentraj vektoraj elementoj de planedet-(komet-)/orbito

(Alvenprelego en
Internacia Akademio de Sciencoj de Sanmarino,
la 3-an de januaro 1984)
de

Božidar Popović (Jugoslavio)
Doktoro de matematikaj sciencoj, emerita universitata profesoro, *Beograd*

Scienca Revuo, vol. 36 (1985), n-ro 2 (150)

1. Enkonduko

Ĉi tio estas detala resumo de la samtitola ruslingva verko, kiu aperis en la Beograda Astronomia Observejo, kiel *Publication N° 35,* en la rusa lingvo. Oni povas turni sin tien por trovi la detalojn pri ellaborado de pluraj formuloj. Sed ĉar preskaŭ ĉiuj ĉapitroj aperis (kiel apartaj esplorartikoloj) en Esperanto, la jarindikoj referencas al tiuj artikoloj en la verkarlisto, publikigita jam antaŭe (Scienca Revuo, 1983, 79-85).

2. Kerno de la problemo

Sub la nomo "suncentraj vektoraj elementoj" de orbito de planedeto (laŭ kometo) oni komprenas la sistemon de la elementoj konsistanta el **suncentra pozicio de planedeto ($\vec{r}_0$)** kaj ĝia **suncentra rapido ($\vec{v}_0$) en donita momento (t_0)**. Ĉi tiuj elementoj, konsiderataj kiel la plej naturaj moviĝelementoj, estas pritraktitaj detale kiel la sistemo de elementoj (1977), pro kio ni ne haltos ĉe ilia utiligo en la neperturbata moviĝo. Celo de ĉi tiu verko estas, unuloke kaj sisteme, montri **diversajn formojn por ekvacioj de perturboj** de ĉi tiuj elementoj. Ĉiu el la formoj havas iajn avantaĝojn kaj iajn mankojn rilate al la aliaj formoj kaj estas tiom pli interese havi ilin kune.

Se, anstataŭ simpla problemo de du korpoj, oni pritraktas iom perturbatan moviĝon da la koncerna korpo, la ekvacion de ĝia moviĝo oni povas skribi en sufiĉe ĝenerala formo

$$d^2\vec{r}/(dt^2) = -\mu r^{-3}\vec{r} + \varepsilon \cdot \vec{F} \qquad (1)$$

kie $\varepsilon\vec{F}$ prezentas la sumon de ĉiuj fortoj agantaj ekster la "neperturbata moviĝo de du korpoj" (ekz. ĉe moviĝo de artefarita satelito kiel la perturba forto povas esti konsiderata: altirforto de aliaj korpoj; influoj de nesfereco de la planedo, influo de ĝia atmosfero k.s.). Per la eta koeficiento ε oni esprimas, ke la neperturbata moviĝo estas la ĉefa, kaj ke ĉiuj aliaj influoj estas multe malpli grandaj ol altirforto de la ĉefa korpo. Pro tio ampleksega klaso de moviĝoj povas esti esprimata per la ĝenerala formo (1).

3. Variigo de la lagranĝaj koeficientoj

La vektora produto de la ekvacio (1) per $\vec{r}$ kaj $\vec{c}$ donas la "integralojn":

$$\vec{r}\times\vec{v}=\vec{r}_0\times\vec{v}_0+\varepsilon\vec{c}_1,\ \vec{c}_1=\int_{t_0}^{t}\left(\vec{r}\times\vec{F}\right)dt \tag{2}$$

$$\vec{v}\times\vec{c}-\frac{\mu}{r}\vec{r}=\vec{e}=\vec{e}_0+\varepsilon\vec{e}_1\ ,\ \vec{e}_1=\int_{t_0}^{t}\left[\vec{F}\times\vec{c}+\vec{v}\times\left(\vec{r}\times\vec{F}\right)\right]dt \tag{3}$$

Diskomponi la pozicivektoron kaj la rapidvektoron jene

$$\vec{r}=f\vec{r}_0+g\vec{v}_0+h\vec{c}_0\ ,\ \vec{v}=f'\vec{r}_0+g'\vec{v}_0+h'\vec{c}_0 \tag{4}$$

Tiam (2), post skalara multipliko per $\vec{c}_0$, $\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$ donas la esprimojn por *fg' –f'g, gh' – g'h, hf – h'f.* La elimino de *h',* post tio de *h',* el du lastaj igis tiujn esprimojn:

$$\begin{cases} fg' - f'g = 1 + \varepsilon \cdot c_0^{-2}\left(\overrightarrow{c_0} \cdot \overrightarrow{c_1}\right) \\ h = -\varepsilon c_0^{-2}\left(\vec{r} \cdot \overrightarrow{c_1}\right) = -\varepsilon\left(f\overrightarrow{r_0} + g\overrightarrow{v_0}\right) \cdot \overrightarrow{c_1} : \left(\vec{c} \cdot \overrightarrow{c_0}\right) \\ h' = -\varepsilon\left(\vec{r} \cdot \overrightarrow{c_1}\right)c_0^{-2} = -\varepsilon\left(f'\overrightarrow{r_0} + g'\overrightarrow{v_0}\right) \cdot \overrightarrow{c_1} : \left(\vec{c} \cdot \overrightarrow{c_0}\right) \end{cases} \tag{5}$$

Aliflanke la "integralo" (3) post multipliko per $\overrightarrow{v_0}$ kaj per $\overrightarrow{r_0}$, post iom da transformoj, donas

$$\begin{cases} c_0^2 f' + \vec{R} \cdot \overrightarrow{v_0} = \varepsilon \cdot \overrightarrow{d_1} \cdot \overrightarrow{v_0} - & \vec{R} = \mu\left(\dfrac{\vec{r}}{r} - \dfrac{\overrightarrow{r_0}}{r_0}\right) \\ c_0^2\left(1 - g'\right) + \vec{R} \cdot \overrightarrow{r_0} = \varepsilon \cdot \overrightarrow{d_1} \cdot \overrightarrow{r_0} & \overrightarrow{d_1} = \vec{v} \times \overrightarrow{c_1} - \overrightarrow{e_1} \end{cases} \tag{6}$$

Trovendaj restas ankoraŭ la esprimoj por *f, g*. La unua paŝo estas enigo de *f′, g′* en la unuan ekvacion (5) post kio pluraj transformoj donas *g* esprimita per *f*:

$$\eta g / r_0 = \left(\overrightarrow{r_0} \cdot \overrightarrow{v_0}\right)\left(1 - f\right) \pm \left[r_0^2 \overrightarrow{v_0^2}\left(1 - f\right)^2 + 2\mu r_0 f\left(1 - f\right) + \varepsilon d\left(2\tau + \varepsilon d\right)c_0^2 + \mu^2 h^2\right]^{1/2}$$
(7)

kun mallongaj esprimoj por τ kaj *d*.

La dua paŝo, konkorde kun la procedo en la neperturbata rnoviĝo, konsistas el enkonduko de la nova variablo ξ per

$$r\left(1 - f\right) = a_0\left(1 - \cos\xi\right) - \varepsilon r_0 f_1 \tag{8}$$

Pluraj transformoj kondukas al la esprimoj por *f, g,* kies ĉefaj partoj kongruas kun la esprimoj en la neperturbata moviĝo — aldoniĝas nur la membroj kun ε:

$$\begin{cases} f = 1 - (1 - \cos\xi)a_0 / \varepsilon f_1 \\ \mu g = a_0\left(\overrightarrow{r_0} \cdot \overrightarrow{v_0}\right)(1 - \cos\xi) + r_0\sqrt{\mu a_0}\sin\xi + \varepsilon g_1 \end{cases} \tag{9}$$

kun detalaj esprimoj por la perturboj f_1, g_1.

La tria paŝo estas la ĝeneraligita Kepler-ekvacio por la variablo ξ, resp. la nova variablo "reguliga anomalio" *y,* difinita per

$$y = \xi\sqrt{a_0 / r_0} \tag{10}$$

Denove ekirinte, same kiel en la neperturbata moviĝo, sed kun multe pli grandaj malfacilaĵoj, laŭ simila vojo, mi trovis

$$y = \frac{s(t - t_0) + \varepsilon J}{1 + \mu y c_2 + \zeta y^2 c_3} \qquad (10)$$

$$s^2 = \mu r_0^{-3}\ ,\ \mu = \overrightarrow{r_0} \cdot \overrightarrow{v_0} / \sqrt{\mu r_0}\ ,\ \zeta = \frac{r_0}{\mu}\overrightarrow{v_0^2 + 1 = 1 - r_0 / a_0} \tag{12}$$

$$c_1 = \frac{\sin\xi}{\xi}\ ,\ c_2 = \frac{1 - \cos\xi}{\xi^2}\ ,\ c_3 = \frac{\xi - \sin\xi}{\xi^3} \tag{13}$$

kun aparta — iom komplika esprimo por la integralo *J*. (Pluraj detaloj en tiutema artikolo, 1972).

4. Metodo de variigo de la konstantoj

Pro pli simpla skribado (eviti oftan nulan indekson), signu la vektorajn elementojn per $(\vec{r}, \vec{v})$ kaj uzu la indekson *"t"* por la grandoj en la momento *t*, do

$$\vec{r}_t = f\vec{r} + g\vec{r} \ , \ v_t = f'\vec{r} + g'\vec{v} \tag{14}$$

por la neperturbata moviĝo. Por ke la samforma solvo kontentigu la perturboekvacion, oni povas apliki la metodon de variigo de la konstantoj, kun la aldona (kondiĉa) ekvacio, t.e. klasikvoje serĉi la perturbojn $\delta\vec{r}, \delta\vec{v}$ el la ekvacioj

$$\delta\vec{r}_t = 0 \ , \ \delta\vec{r}_t = \varepsilon\vec{F} \tag{15}$$

Konsiderante (14), la variigo donas

$$\phi_1 = \delta\vec{r} + \psi_1\delta\vec{v} = 0 \ , \ \phi_1'\cdot\delta\vec{r} + \psi_1'\cdot\delta\vec{v} = \varepsilon\vec{F} \tag{16}$$

kie la diadoj estas

$$\phi_1 = fI + \vec{r}\frac{\partial f}{\partial\vec{r}} + \vec{v}\frac{\partial g}{\partial\vec{r}} \ , \ \psi_1 = gI + \vec{r}\frac{\partial f}{\partial\vec{v}} + \frac{\partial g}{\partial\vec{v}} \tag{17}$$

La solvo de (16) estas

$$\delta\vec{v} = -\Omega_1\cdot\delta\vec{r} \ , \ \delta\vec{r} = \varepsilon\Gamma_1\cdot\vec{F} \tag{18}$$

kun

$$\Omega_1 = \psi_1^{-1}\phi_1 \ , \ \Gamma_1 = \left(\phi_1' - \psi_1'\Omega_1\right)^{-1} \tag{19}$$

Por pli facile trovi la necesajn diadojn utilas disigi la partojn apartenantan al la direkto $\vec{c}$ de tiu en la ebeno $(\vec{r}, \vec{v})$, do

$$\delta\vec{r} = c^{2}\left(\vec{c}\cdot\delta\vec{r}\right)\vec{c} + \delta_{1}\vec{r} \ , \ \delta\vec{v} = c^{-2}\left(\vec{c}\cdot\delta\vec{v}\right)\vec{c} + \delta_{1}\vec{v} \tag{20}$$

$$\phi_{1} = \left(c^{-2} f\right)\vec{c}\vec{c} + \phi \ , \ \psi_{1} = \left(c^{-2} g\right)\vec{c}\vec{c} + \psi \tag{21}$$

Unue montriĝis, ke la partoj en la direkto $\vec{c}$ estas

$$-\frac{\varepsilon}{C} g\left(\vec{F}\cdot\vec{c}\right)\vec{c} \text{ kaj } \frac{\varepsilon}{C} f\left(\vec{F}\cdot\vec{c}\right)\vec{c} \ , \ C = c^{2}\left(fg' + f'g\right) \tag{22}$$

kaj por la "ebenaj partoj" restas la ekvacioj

$$\phi\cdot\delta_{1}\vec{r} + \psi\cdot\delta_{1}\vec{v} = 0 \ , \ \phi'\cdot\delta_{1}\vec{r} + \psi'\cdot\delta_{1}\vec{v} = \varepsilon\vec{F}_{1} \ , \ \overline{F_{1} = c^{-2}\vec{c}\times\left(\vec{F}\times\vec{c}\right)} \tag{23}$$

kun la formala solvo

$$\delta_{1}\vec{v} = -\Omega\cdot\delta_{1}\vec{r} \ , \ \delta_{1}\vec{r} = \varepsilon\Gamma\cdot\vec{F}_{1} \tag{24}$$

$$\vec{r}\vec{r}_{\omega} + \vec{v}\vec{v}_{\omega} = \Omega = \psi^{-1}\phi \ , \ \vec{r}\vec{r}_{\gamma} + \vec{v}\vec{v}_{\gamma} = \Gamma = \left(\phi' - \psi'\Omega\right)^{-1} \tag{25}$$

Kiel la esprimon por la diadio Ω oni trovis

$$\psi_{2}\Omega = \vec{C}\times\Pi \ , \ \psi_{2} = \vec{r}_{\psi}\vec{v}_{\psi}\vec{c} \ , \ \Pi = \vec{r}_{\psi}\vec{v}_{\varphi} - \vec{v}_{\psi}\vec{r}_{\varphi} \tag{26}$$

Post tio estas kalkulita la diado

$$\vec{r}\vec{r}_{\tau} + \vec{v}\vec{v}_{\tau} = T = \phi' - \psi'\Omega \tag{27}$$

kaj post iom da kalkuloj oni trovas

$$c^2\tau_2\Gamma = -\left(\vec{r}\times T\times\vec{c}\right)^k,\ \tau_2 = \overrightarrow{r_\tau}\overrightarrow{v_\tau}\vec{c} \tag{28}$$

Post tio estas donitaj pli detalaj esprimoj por τ_2 kaj por la diado $\vec{c}\times\Pi$, same la detale ellaboritaj eksplicitaj esprimoj por la necesaj partaj nabloj el (17), sed ne utilas ripeti ilin ĉi tie.

Fine la perturbitaj elementoj de la orbito estos

$$\begin{cases} \overrightarrow{r^p} = \vec{r} - \dfrac{\varepsilon}{C}\displaystyle\int_{t_0}^{t} g\left(\vec{F}\cdot\vec{c}\right)dt\,\vec{c} + \varepsilon\int_{t_0}^{t}\left(c^2\tau_2\right)^{-1}\vec{F}\cdot\left\{\vec{c}\times T\times\vec{c}\right\}dt \\ \overrightarrow{v^p} = \vec{v} + \dfrac{\varepsilon}{C}\displaystyle\int_{t_0}^{t} f\left(\vec{F}\cdot\vec{c}\right)dt\,\vec{c} - \varepsilon\int_{t_0}^{t}\left(c^2\psi_2\tau_2\right)^{-1}\left(\vec{c}\div\Pi\right)\cdot\vec{F}\left\{\vec{c}\times T\times\vec{c}\right\}dt \end{cases} \tag{29}$$

(Pluaj detaloj en 1959, kun multaj plibonigoj en **Popović,** 1984.)

5. Senperaj esprimoj por la perturbataj elementoj

Provinte utiligi la "integraligan faktoron" por la perturboekvacio (1), mi trovis, ke ĝia "integralo" povas esti skribita en la formo

$$f\frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r}\frac{df}{dt} = \overrightarrow{v_0} + \varepsilon\int_0^t f\vec{F}dt \tag{30}$$

kondiĉe ke la faktoro (f) kontentigu la "kondiĉan ekvacion"

$$d^2f/\left(dt^2\right) + fr^{-3} = 0 \tag{31}$$

kaj en la momento t_0 oni havu

$$f=1,\quad f'=0,\quad \vec{r}(t_0)=\overrightarrow{r_0},\quad \vec{r}'_0=\overrightarrow{v_0}$$

Ankaŭ (30) havas la integraligan faktoron (f^2) kaj sekvas, ke

$$\vec{r}=f\overrightarrow{r_p}+g\overrightarrow{v_p},\quad \overrightarrow{r_p}=\overrightarrow{r_0}-\varepsilon\int_0^t g\vec{F}dt,\quad \overrightarrow{v_p}=\overrightarrow{v_0}+\varepsilon\int_0^t f\vec{F}dt \tag{32}$$

kontentigas la perturboekvacion. Evidente $(\overrightarrow{r_p},\ \overrightarrow{v_p})$ ludas la rolon de perturbitaj elementoj, kun la (ankoraŭ trovendaj) koeficientoj *f, g*. Ilia graveco plifortiĝas per la konvenaj interrilatoj

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=f'\overrightarrow{v_p}+g'\overrightarrow{v_p},\quad d^2\vec{r}/(dt^2)=f''\overrightarrow{r_p}+g''\overrightarrow{v_p}+\varepsilon\vec{F}$$

$$fg'-f'g=1,\quad \vec{r}\times\vec{v}=\vec{c}=\overrightarrow{r_p}+\overrightarrow{v_p}=\overrightarrow{c_0}+\varepsilon\int_{t_0}^t\left(\vec{r}\times\vec{F}\right)dt$$

kaj pluraj aliaj, similaj al la neperturbata moviĝo.

El la "integralo"

$$\vec{v}\times\vec{c}-\vec{r}/r=\vec{e}=\overrightarrow{e_0}+\varepsilon\overrightarrow{e_1}$$

sen malfacilaĵoj sekvas

$$\begin{cases} -c^2 f' = \dfrac{1}{r}\left(f\overrightarrow{r_p} \cdot \overrightarrow{v_p} + g\overrightarrow{v_p}^2 \right) + \vec{e} \cdot \overrightarrow{v_p} \\ c^2 g' = \dfrac{1}{r}\left(f\overrightarrow{r_p}^2 + g\vec{r}_p \cdot \overrightarrow{v_p} \right) + \vec{e} \cdot \overrightarrow{r_p} \end{cases} \tag{33}$$

Por trovi *f*, *g* utilas la procedo jam aplikita por la neperturbata movigo (v. precipe en 1977). Unue venas la ĉiam praktika esprimo por la "reguliga anomalio":

$$y = \frac{\int_0^t ndt + eJ}{1 + \eta y c_2 + \zeta y^2 c_3}, \quad y = \xi \sqrt{a / r_p}$$

$$n^2 = r_p^{-3}, \ \eta = C\sqrt{ar_{p'}}, \ \zeta = 1 - \frac{r_p}{a}, \text{ ktp.} \tag{34}$$

Post tio estas trovitaj kaj plisimpligitaj la esprimoj por *f, g,* nome:

$$\begin{cases} 1 - f = y^2 c_2 + \varepsilon\left(P_0 + P_1 y c_1 + P_2 y^2 c_2 \right) \\ ng = \eta y^2 c_2 + y c_1 + \varepsilon\left(Q_0 c_0 + Q_1 y c_1 + Q_2 y^2 c_2 \right) \end{cases} \tag{35}$$

kun la koncernaj, ĉi tie ne ripetindaj, esprimoj por *P*-oj kaj *Q*-oj.

Fine estas trovita, same ne ripetinda, detala esprimo por la integralo *J* el la formulo (34).

(Pluaj detaloj en 1976).

6. Perturboekvacioj konvenaj por ĉiuj ekscentriĝoj

Kiam oni kalkuladas la perturbojn de la vektora sistemo de elementoj ($\vec{c}$, $\vec{e}$, T), kiujn *Milanković* (1955) multege utiligis en sia teorio pri glacia periodo de la Tero, la ekvacio por la perturboj de $\vec{e}$ enhavas $|\vec{e}|$ en la denominatoro, kio kaŭzas malkonvenegon, kiam planedeto moviĝas en preskaŭ cirkla orbito. Laŭ ĉio ĝisnuna ŝajnas, ke nur utiligo de la elementoj ($\vec{r_0}, \vec{v_0}$) povas forigi ĉi tiun malkonvenon. La koncernan solvon mi raportis al la Sekcio por ĉielmekaniko de la 12-a Asembleo de Internacia Astronomia Unio (1964) kun posta detala publikigo (1971).

Antaŭ ĉio inversigu la esprimojn (14) por $\vec{r}, \vec{v}$ en la formo

$$\vec{r_0} = g'\vec{r} - g\vec{v}\,, \quad \vec{v_0} = -f'\vec{r} + f\vec{v} \tag{36}$$

kaj apliku rekte la variigon de la konstantoj. Unue estas trovita

$$\delta\vec{r_0} / \delta t = \alpha\vec{r_0} + \beta\vec{v_0} + \varepsilon g\vec{F} \tag{37}$$

kie α,*β* estas konvene esprimitaj kiel funkcioj de la diferenco de la ekscentra anomalio (en la momentoj t, t_0) $\psi = u - u_0$. Post tio la variigo de $\vec{v_0}$ donis

$$\delta\vec{v_0} / \delta t = \gamma\vec{r} - \alpha\vec{v_0} + \varepsilon f\vec{F} \tag{38}$$

La enkonduko de la "reguliga anomalio" ĉi tie en la formo

$$\lambda^2 = \psi^2 \overrightarrow{r_0 / a = \psi^2 / (1-\zeta)} \qquad (39)$$

kaj la utiligo de la jam menciitaj funkcioj c_1, c_2, c_3 plisimpligas multajn esprimojn, interalie ankaŭ tiujn por α, β, γ kaj oni havas

$$\lambda = M : \left(1 + \eta\lambda c_2 + \zeta\lambda^2 c_3\right), \quad M = n(t - t_0), \quad n = r_0^{-3} \qquad (40)$$

Fine estas donitaj konvenaj laborformuloj por integraligo de la ekvacio (37), (38), por ricevi la perturbitajn elementojn ($\vec{r}_0, \vec{v}_0$) (Pluraj detaloj en la jam menciita 1971)

7. Plej simpla formo de la perturboj

Se oni ekiras de la matrica formo

$$\begin{Bmatrix} \vec{r} \\ \vec{v} \end{Bmatrix} = \mathrm{A} \begin{Bmatrix} \vec{r}_0 \\ \vec{v}_0 \end{Bmatrix} \quad \mathrm{A} = \begin{Bmatrix} f & g \\ f' & g' \end{Bmatrix} \qquad (41)$$

kie la matrico A dependas de ($\vec{r}_0, \vec{v}_0$, t–t_0), oni povas inverse ekiri de la momento t al la momento t_0 kaj havi

$$\begin{Bmatrix} \vec{r}_0 \\ \vec{v}_0 \end{Bmatrix} = \mathrm{B} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{r} \\ \vec{v} \end{Bmatrix} \quad \mathrm{B} = \begin{Bmatrix} F & G \\ F' & G' \end{Bmatrix} \qquad (42)$$

kaj la elementoj de la matrico B estas la samaj funkcioj kiel en A sed de *(* $\vec{r}_0, \vec{v}_0$, *t_0–t).* Oni trovas ankaŭ la interrilatojn

$$B = A^{-1},\ F = g',\ G = -g,\ F' = f',\ G' = f$$

Por tre malgrandaj tempintervaloj, pro

$$\delta\vec{r} = 0\,,\quad \delta\vec{v} = \varepsilon\vec{F} \tag{43}$$

la lineigo de (42) donas

$$\begin{Bmatrix} \delta\vec{r_0} \\ \delta\vec{v} \end{Bmatrix} = \delta B \cdot \begin{Bmatrix} \vec{r} \\ \vec{v} \end{Bmatrix} + B \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{v} \end{Bmatrix} \tag{44}$$

kaj la suma influo troviĝas per kvadraturo, do

$$\begin{Bmatrix} \vec{r_0} \\ \vec{v_0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{r_0} \\ \vec{v_0} \end{Bmatrix} + \varepsilon \cdot \begin{Bmatrix} -g \\ f \end{Bmatrix} \vec{F} dt + \int_{t_0}^{t} \delta B \cdot A \begin{Bmatrix} \vec{r_0} \\ \vec{v_0} \end{Bmatrix} dt \tag{45}$$

Utiligante la formulojn por *f'*, *g, f', g'* (el 1977) en la koncerna senco por *B,* oni vidas ke en *B* oni devas variigi krom ξ, nur du grandojn

$$\begin{cases} \beta = \vec{r} \cdot \vec{v}, \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{\mu}\vec{v}^2, \quad \delta\beta = \varepsilon\left(\vec{r} \cdot \vec{F}\right), \delta a = \varepsilon\left(\vec{v} \cdot \vec{F}\right)\dfrac{2a^2}{\eta} \\ \delta\xi = \sigma \cdot \delta\beta + \tau \cdot \delta a : \mu/\left(2a^2\right) \end{cases} \tag{46}$$

kun tre konvenaj esprimoj por σ, τ:

$$-\sqrt{\mu a}\,\sigma = 1 - G'\,,\quad \sqrt{\mu / a}\,\tau = \left[3\left(t_0 - f\right) - G\right] : r_0 + r^2 F' : \mu \tag{47}$$

Pro tio la matrico el (45) fariĝas

$$\begin{cases} \delta\beta = \dfrac{\delta B}{\delta\beta}\delta b + \dfrac{\delta B}{\delta a} + \cdot\delta\xi = \varepsilon\dfrac{\delta B}{\delta\xi}\left(\vec{r}\cdot\vec{F}\right) + \varepsilon\dfrac{2a^r}{\mu}\dfrac{\delta B}{\delta a} + \tau\dfrac{\delta B}{\delta\xi}\left(\vec{r}\vec{F}\right) \\ \delta B\cdot A = c\cdot\delta\beta + D\cdot\delta a + E\cdot\delta\xi \end{cases} \tag{48}$$

kun tuj donotaj eksplicitaj esprimoj por 2×2 matricoj *C, D, E.* La fina formo estas

$$\delta B\cdot A = \varepsilon\left(\vec{r}\cdot\vec{F}\right)C + \frac{\varepsilon}{\mu}2a^2\left(\vec{r}\cdot\vec{F}\right)D + \varepsilon\left(\sigma\vec{r}\cdot\vec{F} + \tau\vec{v}\vec{F}\right)E \tag{49}$$

Oni facile trovas $\dfrac{\partial B}{\partial\beta}$ kaj tiam

$$C = -\frac{\partial B}{\partial\beta}A = \frac{r}{\mu}\begin{Bmatrix} f'(1-g') & g'(1-g') \\ f'^2 & -f'(1-g') \end{Bmatrix} \tag{50}$$

Por elementoj D_{ij} de la matrico

$$D = \frac{-\partial B}{\partial B}\cdot A \tag{51}$$

kun utiligo de la konata rilato *FG'– F'G = 1,* el kiu sekvas

$$\delta F\cdot G' - F'\delta G = -\left(F\delta G' - G\delta F'\right) \tag{52}$$

kio plifaciligas la eltrovadon de la elementoj D_{ij} kun la fina rezulto

$$D_{11} = -D_{22} = \frac{fr_0}{ra}(1-f) + \frac{f'r_0}{2a\mu}\left(2\beta - 2\beta G - r^2 F'\right) = \frac{1-g'}{\mu 2}(2\beta f' - \mu f) + \frac{r_0}{2\mu a}(rf')^2$$

$$D_{12} = -\frac{r_0}{ra}(1-f)g + \frac{g'r_0}{\mu a}\left(\beta - G'\beta - \frac{r^2 F'}{2}\right) = \frac{1-g'}{\mu a}(\beta r g' - \mu g) + r_0 \frac{r^2}{2\mu a} f'g'$$

$$D_{21} = \frac{-ff'}{2a}\left(-1 + 2f - \frac{\beta}{\mu} rf'\right) - f'\frac{1-f}{2a}\left(2f - \frac{\beta}{\mu} rf'\right) = \frac{-f'}{2\mu a}(\mu f - \beta r f') \quad (51a)$$

Fine la derivoj laŭ ξ donas elementojn de la matrico

$$E = -\frac{\partial B}{\partial \xi} \cdot A \quad (53)$$

$$E_{11} = -E_{22} = r_0 \sqrt{a/\mu}\, f'(\Theta - f) \quad (53a)$$

$$E_{11} = r_0 \sqrt{a/\mu}\,(f'g + g'\Theta)$$

$$E_{21} = -\frac{f}{r}\sqrt{\mu a}\left[\frac{\Theta}{r} + \frac{\beta}{\mu} f'\left(\frac{r}{a} - 1\right) + \frac{f'}{\sqrt{\mu a}}\right] - r^2 f' + \beta\left(1 - \frac{a}{r_0}\right)$$

kie

$$\Theta = r\left(\frac{1}{r} - \frac{1-f}{a} + \frac{\beta}{\mu} f'\right) \tag{54}$$

Per utiligo de enkondukita "reguliga anomalio" de la esprimoj *por f, g, f', g',* oni facile trovas ĉiujn necesajn kvantojn en (45). Fakte laŭ la formuloj el 1977, oni devas kalkuli

$$s^2 = \mu r_0^{-3}, \quad \eta = \left(\vec{r} \cdot \vec{v_0}\right) / \sqrt{\mu r_0}, \quad \xi = 1 - r_0 / a, \quad y = \frac{s\left(t - t_0\right)}{1 + \eta y c_2 + \xi y^2 c_3} \tag{55}$$

$$c_1 = \frac{\sin x}{x}, \quad c_2 = \frac{1 - \cos x}{x^2}, \; c_3 = \frac{x - \sin x}{x^3}, \quad x = y\sqrt{r_0 / a} \tag{56}$$

kun la uzo de la signo *x,* por ne miksi tiean ξ kun ξ el *F, G.* Kaj post tio

$$f = 1 - y^2 c_2 \;, \; sg = y c_1 + \eta y^2 c_2 = st\left(t - t_0\right) - y^3 c_3 \tag{57}$$

$$f' = \left(r_0 / r\right) s y c_1, \quad g' = 1 - \left(r_0 / r\right) y^2 c_2 \tag{58}$$

kie

$$r = r_0\left(1 - \eta y c_1 + \xi y^2 c_2\right) \tag{59}$$

Tiam enkondukota en (5) ebligas la integraligon. Pro

$$c^2 \vec{F} = \left(\vec{v_0} \vec{c} \vec{F}\right) \vec{r_0} + \left(\vec{c} \vec{r_0} \vec{F}\right) \vec{v_0} + \left(\vec{c} \vec{F}\right) \vec{c}$$

oni havas la komponantojn en la direktoj $\vec{r_0}, \vec{v_0}, \vec{c}$.

(Pluaj detaloj en *Popović* 1981, 1984.)

8. Perturboj de rektangulaj koordinatoj

Anstataŭ uzi iajn ajn elementojn de orbito, eblas serĉi rekte perturbojn de planedet-(komet)-koordinatoj, t.e. perturbojn de la pozicivektoro mem. Kiel same nova alirformo al la problemo, ĝi iusence apartenas al la antaŭaj ĉapitroj kaj mi pritraktu ankaŭ ĝin.

La neperturbitan vektoron signu per $\vec{r}$ kaj la perturbitan per $\vec{r}^{\,*}$, kun

$$\vec{r}^{\,*} = \vec{r} + \varepsilon\vec{x}\,,\ \vec{F} = \vec{f} + \varepsilon\Theta(1) \tag{60}$$

Tiam (v. 1961) perturbojn de la unua rango donas

$$d^2\vec{x}/(dt)^2 + \mu r^{-3}\vec{x} - 3\mu r^{-5}\left(\vec{r}\cdot\vec{x}\right)\vec{r} = \vec{f} \tag{61}$$

La unua integralo estas

$$\vec{r}\times\frac{d\vec{x}}{dt} - \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{\vec{x}} = \vec{G}\,,\ \ \vec{G} = \int_{t_0}^{t}\left(\vec{r}\times\vec{f}\right)dt \tag{62}$$

Se oni diskomponas

$$\vec{x} = \xi\vec{r} + \eta\left(\vec{c}\times\vec{r}\right) + \zeta\vec{c}\ ,\ \ \vec{c} = \vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt} \tag{63}$$

la unua integralo facile donas

$$\zeta = -c^{-2}\vec{r}\cdot\vec{G}\ ,\quad \beta\zeta' = -c^{-2}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{G} \tag{64}$$

$$\xi' + r^2\eta' = c^{-2}\left(\vec{c}\cdot\vec{G}\right) \tag{65}$$

Skalara multipliko de (65) per $\vec{r}$, kun apliko de (63), donas

$$\xi'' r^2 + 2\xi'\left(\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right) - \xi\mu r^{-3}r^2 - 2\eta' c^2 + \mu r^{-3}\xi r^2 - 3\mu r^{-1}\xi = \vec{r}\cdot\vec{f} \tag{66}$$

Aliflanke ĝia skalara multipliko per $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ donas novan integralon

$$\vec{v}\frac{d\vec{x}}{dt} + \mu r^{-3}\left(\vec{r}\cdot\vec{x}\right) = F_r\ ,\quad F_r = \int_{t_0}^{t}\cdot d\vec{r} \tag{67}$$

aŭ, pro (63)

$$\xi'\left(\vec{r}\cdot\vec{v}\right) + \xi\vec{v}^{\,2} + \eta' c^2 + \mu r^{1}\xi = F_r \tag{67a}$$

Post elimino de η' el (66) kaj (67) venas la ekvacio facile transformebla al la formo

$$\left(r^2\xi\right)'' + \mu r^{-3}\left(r^2\xi\right) = \sigma\ ,\quad \sigma = 2F_r + \vec{r}\cdot\vec{f} = 2\int_{t_0}^{t}\vec{f}\cdot d\vec{r} + \vec{f}\cdot\vec{r} \tag{68}$$

Eleganta solvo de (68) multe plisimpligis la solvon donitan en 1971. Nome, sciante ke $f'' = -\mu r^3 f$, $g'' = — \mu^{-3} g$, serĉu la solvon per la metodo de variado de konstantoj, do en la formo

$$r^2\xi = C_1 f + C_2 g \tag{69}$$

Per tiu vojo oni venas al la solvo

$$r^2\xi = -f\int_{t_0}^{t} g\sigma dt + g\int_{t_0}^{t} f\sigma dt \tag{70}$$

Post tio sekvas el (65) per simpla kvadraturo

$$\eta = \int_{t_0}^{t} (cr)^{-2}\left(\vec{c}\cdot\vec{G}\right)dt - 2\int_{t_0}^{t} f^2\left(r^2\xi\right)dt \tag{71}$$

Per ĉi tio estas plene trovitaj la perturboj de la unua ordo. Se oni konas la solvon $\vec{r}^{\,k}$ de la moviĝekvacio, kun la proksimumigo de la grado *k,* la analizo, donita detale en *Popović* 1971, 1984, montras, ke la perturboj de unu plia rango *(k + 1)* estas troveblaj el la ekvacio, laŭforme identa kun (61), nome

$$d^2\vec{x}/(dt)^2 + \mu r^{-3}\vec{x} - 3\mu r^{-5}\left(\vec{r}\cdot\vec{x}\right)\vec{r} = \vec{f}_{k+1} \tag{72}$$

$$\vec{r}^{\,*} = \vec{r}^{\,k} + \varepsilon^{k+1}\vec{x}\ ,\ \ \vec{f}_{k+1} = \left(\frac{F - F_k}{\varepsilon^k}\right)\varepsilon = 0 \tag{73}$$

Se, en (72), ni notas $\vec{x}_{k+1}$ anstataŭ $\vec{x}$, kaj ni aplikas la diskomponon

$$\vec{r}_{k+1} = \zeta_{k+1}\vec{r} + \eta_{k+1}\left(\vec{c}\times\vec{r}\right) + \xi_{k+1}\vec{c} \tag{74}$$

la kompletan solvon de (72) oni havas en la formo (70), (71), (64), t.e

$$r^2\xi_{k+1} = -f\int_{t_0}^{t} g\sigma_{k+1}dt + g\int_{t_0}^{t} f\sigma_{k+1}dt \tag{75}$$

$$\eta_{k+1} = \int_{t_0}^{t} (cr)^{-2}\left(\vec{c}\cdot\vec{G}_{k+1}\right)dt - 2\int_{t_0}^{t} r^2\left(r^2\xi_{k+1}\right)dt \tag{76}$$

$$\zeta_{k+1} = -c^{-2}\vec{r}\cdot\vec{G}_{k+1} \tag{77}$$

ĉe kio

$$\vec{G}_{k+1} = \int_{t_0}^{t}\left(\vec{r}\times\vec{f}_{k+1}\right)dt \ , \ \ \sigma_{k+1} = 2\int_{t^0}^{t}\vec{f}_{k+1}\cdot d\vec{r} + \vec{r}\cdot\vec{f}_{k+1} \tag{78}$$

La perturboforto povas esti ajndevena, pro kio la proponita solvo konvenas por ĉiuspeca forto, sub la sola kondiĉo, ke oni povas seriigi ĝin laŭ gradoj de malgranda kvanto ε. Eĉ se ε ne estas tre malgranda, la procedo tiom simplas, ke utilas ripeti ĝin plurfoje — ĝis atingo de la dezirata precizeco.

Ankaŭ ĉi tie oni povas eviti nerealajn kvantojn (en okazo de hiperbola orbito), per enkonduko de la "reguliga anomalio", laŭ la formuloj (72)-(78) el *Popović* 1984.

(Pluaj detaloj *en Popović* 1971, 1984)

9. Perturbata moviĝo prezentita en formo de diferenciala ekvacio kun konstantaj koeficientoj

Uzante la pseŭdotempon, t.e la diferencialan aliformigon

$$dt = d\tau \cdot r\sqrt{a/\mu} \tag{79}$$

mi sukcesis redukti la ekvacion por la perturbata moviĝo al diferenciala ekvacio kun konstantaj koeficientoj kaj mi opinias ke ankaŭ tiu solvo povas esti konsista parto de ĉi tiu verko.

La ekvacio por perturbata moviĝo transformiĝas kiel

$$d^2\vec{r}/(d\tau)^2 + \vec{r} = -a\vec{e} + \varepsilon\vec{F}_1 \ , \ \ \vec{F}_1 = \left[\vec{F} - \frac{a}{\mu}\left(\vec{v}\cdot\vec{F}\right)\vec{v}\right] r^2 a/\mu \tag{80}$$

Kvankam dekstraflanke troviĝas neneglektebla sumato $-a\vec{e}$, oni povas (atente) apliki la metodon de variigo de la konstantoj, do serĉi la solvon en la formo

$$\vec{r} = \vec{A}\cos\tau + \vec{B}\sin\tau \ , \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{A}\sin\tau + \vec{B}\cos\tau \tag{81}$$

kun la kondiĉoj

$$\cos\tau\frac{d\vec{A}}{d\tau} + \sin\tau\frac{d\vec{B}}{d\tau} = \vec{0}$$

$$+\sin\tau\frac{d\overrightarrow{A}}{d\tau}+\cos\tau\frac{d\overrightarrow{B}}{d\tau}=-a\vec{e}+\overrightarrow{F_1}$$

El $d\overrightarrow{A}/d\tau, d\overrightarrow{B}/d\tau$ oni trovas $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$ kaj por (81) la formon

$$\begin{cases}\vec{r}=\overrightarrow{A_0}\cos\tau+\overrightarrow{B_0}\sin\tau-a\vec{e}+a\overrightarrow{e_0}\cos\tau+\left[\cos\tau\int_0^\tau\cos\tau d\left(a\vec{e}\right)+\sin\tau\int_0^\tau\sin\tau d\left(a\vec{e}\right)\right]\\ +\varepsilon\left[\sin\tau\int_0^\tau\overrightarrow{F_1}d\tau-\cos\tau-\int_0^\tau\sin\tau\overrightarrow{F_1}d\tau\right],\\ \frac{d\vec{r}}{d\tau}=-\overrightarrow{A_0}\sin\tau+\overrightarrow{B_0}\cos\tau-a_0\overrightarrow{e_0}\sin\tau+\left[\cos\tau\int_0^\tau\sin\tau d\left(a\vec{e}\right)-\sin\tau\int_0^\tau\cos\tau d\left(a\vec{e}\right)\right]\\ -\varepsilon\left[\sin\tau\int_0^\tau\sin\overrightarrow{F_1}d\tau+\cos\tau\int_0^\tau\cos\tau\overrightarrow{F_1}d\tau\right]\\ \overrightarrow{A_0}=\overrightarrow{f}_0,...\overrightarrow{B_0}=\overrightarrow{v_0}+\overrightarrow{r_0}\sqrt{a_0/c^\mu}\end{cases}\tag{82}$$

Restas ankoraŭ trovi τ depende de *t*. El

$$r\cdot dr=\sqrt{a^2e^2-\left(r-a\right)^2}\cdot\sqrt{\mu/a}dt \tag{83}$$

kun utiligo de la antaŭa koncerna sperto, serĉu *r* en la formo

$$r - a = \left(A + B\sin\tau + C\cos\tau\right)$$

Oni trovas

$$A = 0\,,\ aC = r_0 - a\,,\ aB = \left[a^2e^2 - (r_0 - a)^2\right]^{1/2}$$

kaj la solvon de (83) en la formo

$$\frac{r_0}{a}\tau + B(1 - \cos\tau) - C(r - \sin\tau) = \int_{t_0}^{t} ndt + \varepsilon r_0 nJ$$

$$\mu a^{-3} = n^2\,,\ \varepsilon J = \frac{1}{r_0 n}\left[(1 - \cos\tau)dB + \sin\tau dC\right]$$

kio kun helpo de la "reguliga anomalio"

$$y = \tau\sqrt{a/\mu}$$

fariĝas

$$y\left(1 + \eta y c_2 + \zeta y^2 c_3\right) = \frac{1}{r_0 n}\int_0^t ndt + \varepsilon J$$

kun la donitaj esprimoj por η, ζ.

(Aliaj detaloj en 1976).

Menciiĝu fine, ke ankaŭ ĉi tie *y* estas reala same por hiperbolaj kiel por elipsaj orbitoj, ĉar kiam $a<0$ tiam ankaŭ pseŭdotempo estas pure nereala. Do ĉi tiu metodo, same kiel ĉiuj antaŭaj — uzantaj la reguligan anomalion — estas aplikeblaj ne nur por planedetoj, sed ankaŭ por kometoj kun hiperbolaj orbitoj.

10. Literaturo

Babadĵanjanc, L. K. (1969a): Analitiĉeskie metocli viĉislenia vozmuŝĉenij v koordinataĥ planet, I, - Vestnik Leningr. Univ., 7, 121-139,

Babadĵanjanc, L.K. (1969b): Metodi viĉislenia vozmuŝĉenij v prjamougolniĥ koordinataĥ planet, II. Vestnik Leningr, Univ., 19, 134-145.

Brouwer, D. (1964): Integration of the equations of general planetary theory in rectangular coordinates. — Astr, Journal, 81, 37-45.

Goodyear, W. H. (1965): Completely General Closed-Form Solution for Coord. and Partial Derivatives of the Tho-Body Problem, - Astr. Journal, 70, 3, 189-192.

Kustaanheimo, P. E. (1960); On the Determination of Orbits of Comets and Asteroids. - Soc. Sc. Fenn., Comm. Phys. Math., 25, 25-47 = Publ. Astr. Helsinki, 84.

Herrick, S. (1948): A Modification of the "Variation-of-Constants" Method for Special Perturbations. — Publ. Astr. Soc. Pacific, 60, 321.

Lagrange, P. (1978): Sur le problème de la determination des orbites des comètes d'après trois observations. - Oeuvres de Lagrange 4, 439.

Milanković, M. (1955): Osnovi nebeske mehanike. II. izd. "Naučna knjiga". Beograd.

Musen, P. (1954): Special Perturbations oft he Vectorial Elements. — Astr. Journal, 59, 262-267.

Musen, P. (1963): On the General Planetary Perturbations in Rectangular Coordinates. — Journ. Geophys. Res., 68, 9, 2727-2734.

Musen, P. (1964): On a Modification of Hill's Method of General Planetary Perturbations. Journ. des Observations, 47, 4, 73-84.

Musen, P. (1965): On the General Perturbations of the Position Vecotors of a Planetary System. - Journ. des Observateurs, 48, 1, 1-17.

Pines, S. (1961): Variation of Parameters for Elliptic and Near Circular Orbits. - Astr. Journal, 66, 1, 5-7.

Popović, B. (ĝis 1982 v. en Scienca Revuo, 1983, 79-85). *Popović B. (1985): Les perturbations des éléments vectoriels héliocentriques des orbites des petites planetes et cometes. - Publication N. 35, Observ. astronom. Beograd.*

Stumpff, K. (1947): Neue Theorie und Methode der Ephemeridenrechnung. - Abh. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin. nat. KL, 1, 1-98.

Resumo

Poremećaji vektorskih heliocentričnih elemenata putanja malih planeta i kometa

Datisu razni oblici jednačina poremećaja za najprirodnije elemente kretanja male planete (ili komete): heliocentrični položaj planete ($\vec{r}_0$) i njena heliocentrična brzina ($\vec{v}_0$) u datom momentu (t_0). Polazna jednačina za poremećeno kretanjeje (1), sa silom poremećaja $\varepsilon\vec{F}$, koja ne mora da je privlačna snaga drugih tela, već može biti proizvoljnog porekla — bitno je samo da je e vrlo mala veličina. Detaljnije je sve obradjeno u monografiji (Popović 1984).

1. Varijacija Lagranžovih koeficijenata. Sa (4) se ne samo uvodi dodatni Lagranžov koeficijent h, već se daje mogućnost da se nadju poremećaji koeficijenata f, g, usled sile $\vec{F}$. Naime skalarmno množenje (2) sa $\vec{c}_0, \vec{r}_0, \vec{r}_0$, uz malu promenu oblika, daje (5), a (3) daje (6). Unošenjem f', g' u prvu jednačinu (15) nakon eksplicitnog rešavanjapo g, dobija se (7). Uvodjenje pak nove promenljive ε pomoću (6), omogućuje da se izrazi sa f,g,, transformišu na oblik (9) kao kod neporemećenog kretanja. Za promenljivu ε, odn. za novu promenljivu (10) y ("regulišuća anomalija") dobijaju se konačno izrazi (11), uz oznake (12), (13).

2. Metoda varijacije konstanti. U ovom delu rada su izbegnuti indeksi "o", time što su elementi putanje označenisa ($\vec{r}, \vec{v}$), a u trenutku t imamo (14). Varijacija konstanti se postiže sa (15), detaljnije (16) — koristeći diade (17). Formalno rešenje ima oblik (18), ali da bismo ove diade izrazili eksplicitno, data su razlaganja (20), (21), napravac $\vec{c}$ i normalno na njega. Najpre se dobija da su (22) komponente u pravcu $\vec{c}$, adaza "komponente u ravni" ostaju jednačine (23) sa formalnim rešenjem (24). Uz pomoć

oznaka (25), koristeći osnove računa sa diadama (koje su vrlo sažeto iznete u Popović 1984), nadjeni su izrazi (26) i (28). Sami elementi se nalaze integracijom, kao (29).

3. Neposredni izradi za poremećene elemente. Pokušaj primene integracionog množitelja (f) najednačinu (1), doveoje najpre do (30), uz uslov (31). Medjutim (30) takodje ima integracioni množitelj ($f^{2)}$, pa se dobije (32), a zatim sledi postupak već primenjivan kod neporemećenog kretanja (napr. Popović 1977). Tako se dobije prvo "regulišuća anomalija" (34), a zatim (35) za same koeficijente (a u Popović 1976a takodje detaljni izrazi za integral J).

4. Jednačine poremećaja pogodne za sve ekscentricitete. Vektorski elementi putanje koji sadrže iperihelni vektor $\vec{e}$, napr. Milankovićev sistem ($\vec{c},\vec{e}$,T) nisu nimalopodesni za skoro kružne putanje, jer ser uvek javlja mala veličina $\vec{e}$ u imenicu. I tu pomaže upotreba $\vec{r}_0,\vec{v}_0$ u svojstvu vektorskih elemenata putanje. Najpre se inversijom izraza (14) naclje (36), i neposred-no primeni varijacija "konstanti". Time se nalaze (37) i (38), pri čemu su α, ρ, γ izraženi zavisno od razlike ekscentriňich anomalija ($\psi=u—u_0$). Dalje uprošćenje se postiže uvodjenjem "regulišuće anomalije", ovde u obliku (39) za koju se nalazi izraz (40) , a za α, β, γ znatno uproiini izrazi (Popović 1971).

5. Najprostiji oblik poremećaja. Kad se koristi matrični oblik (41), pri čemu A zavisi od ($\vec{r}_0,\vec{v}_0$, $t-t_0$), može se putanjom poći u suprotnom smeru — od trenutka t ka trenutku t_0, pa imati (42), pri čemusu elementi matrice B iste funkcije kao u A, Ali od ($\vec{r}_0,\vec{v}_0$, $t-t_0$). Varijacije (43) za male vrednosti intervala i linearizacija (42) daju (44), a zatim se ukupno dejstvo dobija kvadraturom (45). Kad se upotrebe poznati izrazi za f, g, f', g', (napr. Popović 1977), vidisedasekod B javljaju sam o varijacije (46), što daje (48) i (49). Tada jednostavno diferenciranje i množenje matrka daju matricu C, a za elemente matrice (51) dobiju se izrazi (51a). Na isti način, popromenljivoj ξ, dobićemo elemente matrice (53). Korišćenjem uvedene regulišuće anomalije, lako se dobiju svepotrebne veličine iz (45). Pri tome efektivnom računu podleiu veličine (55) do (59).

6. Popemećaji u pravouglim koordinatama, Vez μ izmedju neporemećenih i poremećenih vektora iskažimo u obliku (60), pa će poremećaji prvog reda biti (61). Prvi integral ima oblik (62), a razlaganje (63) daje skalarne izraze (64), (65). Kad potom pomnožimo (61) skalarno sa $\vec{r}$ *, pa sa* $\vec{v}$ *, dolazimo do (66) i (67), odn. (67a). Eliminacijom η iz ovih dveju jednačina dolazi se do (68). Elegantno rešenje ove jednadne je potraženo preko oblika (69) i konačno nadjeno (70). Tada se η nalazi kvadaraturom (71).*

Kad se žele poremećaji višeg reda, polazi se od poznatih poremećaja reda k, pa je nadjeno (Popović 1984) da tada mora biti (72), (73). Ako u (72) stavimo $\vec{x}_{k+1}$ *, umesto* $\vec{x}$ *, paprimenimo razlaganje (74), dolazimo — istim putem kao kod poremećaja prvog reda — do rešenja (75), (76), (77), uz oznake (78).*

7. Poremećeno kretanje u obliku direncijalne jednačine sa stalnim koeficijentima. Koristeći pseudovreme τ, transformacijom (79), jednačina (l) se transformiše u (72). Potražimo, varijacijom konstanti, rešenje u oblku (80), uzpoznate uslovne jednačine. Dolazi se do (82). Još naći sam okako τ ravisiod t. Radi toga podjimo od (83), pri čemu (iz ranijeg iskustva) koristimo oblik (84). Dolazi se do (85), (86), a "regulišuća anomalija" postaje (87) — sa detaljima u Popović 1976, 1984.